

On the diffusion of radiation from a point or a line source in an infinite medium

J. T. JEFFERIES

Division of Physics, National Standards Laboratory, Sydney.

SUMMARY. — The approximate equation of transfer for diffused radiation in a scattering medium is obtained and applied to the cases of infinite media illuminated by a point source or by an infinite line source of radiation.

SOMMAIRE. — Une relation approchée est obtenue pour la propagation du rayonnement diffus dans un milieu diffusant, puis appliquée aux cas de milieux infiniment étendus éclairés par une source ponctuelle ou par une source linéaire de longueur illimitée.

ZUSAMMENFASSUNG. — Die Näherungsgleichung für die Ausbreitung der diffusen Strahlung in einem streuenden Medium wird aufgestellt und auf den Fall eines unendlich ausgedehnten Mediums angewendet, wobei die Strahlungsquelle entweder als punktförmig oder als linear unendlich angenommen ist.

I. The equation of transfer. — CHANDRASEKHAR [4] has shown that the intensity of radiation in an isotropically scattering medium is given by the equation of transfer

$$(1) \quad l \frac{\partial I}{\partial x} + m \frac{\partial I}{\partial y} + n \frac{\partial I}{\partial z} = -\kappa \left[I - \frac{\varpi_0}{4\pi} \int I d\omega - P(x, y, z) \right]$$

where $I = I(x, y, z; l, m, n)$ is the specific intensity, κ the extinction coefficient, ϖ_0 the albedo for single scattering, and l, m, n are direction cosines. The source function P is defined as the ratio of the rate of emission of radiation per unit volume per unit solid angle to the extinction coefficient κ . In a purely scattering medium, the source function P arises from scattering of direct radiation from sources inside and outside the medium.

The exact solution of (1) would be very difficult; however, by using a method similar to that used by EDDINGTON for plane parallel media, a good approximation may be obtained for three dimensional problems as follows.

Integrating (1) over a solid angle 4π it follows that

$$(2) \quad \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = -\kappa[(1 - \varpi_0)J - 4\pi P]$$

where $F_x = \int I l d\omega$ is the x component of the flux of radiation, and F_y and F_z are defined similarly. $J = \int I d\omega$ (all integrals are taken over the whole sphere). Now substituting for I from (1) it is found that, since $\int l d\omega = 0$,

$$(3) \quad F_x = \int I l d\omega = -\frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial}{\partial x} \int I l^2 d\omega + \frac{\partial}{\partial y} \int I l t m d\omega + \frac{\partial}{\partial z} \int I l n d\omega \right]$$

which may be written

$$F_x = -\frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial K_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial K_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial K_{xz}}{\partial z} \right].$$

The approximation introduced by EDDINGTON and adopted here consists in taking

$$K_{xx} = K_{yy} = K_{zz} = 1/3 \int I d\omega = J/3;$$

here, however, there is the complication of "mixed" integrals of the form K_{xy} which, although small for I roughly isotropic, may be comparable with those of the form K_{xx} in many cases of interest such e. g. as near a point source. If we restrict attention to the diffused component, however, the radiation field should be reasonably isotropic; and so, to a good approximation, $K_{xy} = K_{yz} = K_{zx} = 0$.

Substituting in (2) it follows that, if $\lambda = 1 - \varpi_0$,

$$(4) \quad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} = 3\kappa^2 [\lambda J - 4\pi P]$$

which is the analogue of the MILNE-EDDINGTON equation for a three dimensional medium.

As examples of the application of (4), the cases of point source and line source illumination in an infinite medium are considered.

II. Point source illumination. — Consider a point source emitting energy at a rate $4\pi Q$. At a distance r from the source,

$$(5) \quad P(r) = \frac{Q \varpi_0 e^{-\kappa r}}{4\pi r^2}$$

so that (4) becomes, in terms of the coordinate r ,

$$(6) \quad \frac{\partial^2 J}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial J}{\partial r} = 3\kappa^2 \left[\lambda J - \frac{Q \varpi_0 e^{-\kappa r}}{r^2} \right].$$

To solve (6) we apply the method of variation of parameters (FORSYTH [2]) and try a solution of the form

$$(7) \quad J(r) = A(r) \frac{e^{kr}}{r} + B(r) \frac{e^{-kr}}{r}$$

where $k = \sqrt{3\lambda\kappa}$ and $A(r)$ and $B(r)$ are determined in the usual way from the equations:

$$(8) \quad \frac{dA}{dr} \frac{e^{kr}}{r} + \frac{dB}{dr} \frac{e^{-kr}}{r} = 0$$

$$\frac{dA}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{kr}}{r} \right) + \frac{dB}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{e^{-kr}}{r} \right) = -C \frac{e^{-\kappa r}}{r^2}$$

where $C = 3\kappa^2 \varpi_0 Q$.

Solving for A and B , the solution (7) becomes

$$(9) \quad J(r) = \frac{C e^{-kr}}{2kr} \int_{a_1}^r \frac{e^{-(\kappa-k)r}}{r} dr - \frac{C e^{kr}}{2kr} \int_{a_2}^r \frac{e^{-(\kappa+k)r}}{r} dr.$$

The integration constants a_1 and a_2 are to be determined from the boundary conditions that, as $r \rightarrow \infty$, $J \rightarrow 0$ and that as $r \rightarrow 0$ the radial flux of the diffused radiation across a spherical surface surrounding the source is given by the equation

$$F_r = -\frac{1}{3\kappa} \frac{dJ}{dr} \rightarrow \frac{Q\kappa\varpi_0}{r^2} \int_0^r e^{-\kappa\xi} d\xi \rightarrow \frac{Q\kappa\varpi_0}{r}.$$

The convergence at infinity clearly requires that $a_2 = \infty$. The second condition gives, making use of the series representations for the exponential integral:

$$(10) \quad -Ei[-(\kappa-k)a_1] = \log \left| \frac{\kappa+k}{\kappa-k} \right|$$

where

$$(11) \quad -Ei(-x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du.$$

The solution (9) appropriate to this problem then takes the form

$$(12) \quad J(r) = \frac{C e^{-kr}}{2kr} \left\{ \log \left| \frac{\kappa+k}{\kappa-k} \right| + Ei[-(\kappa-k)r] \right\} - \frac{C e^{kr}}{2kr} Ei[-(\kappa+k)r].$$

Numerical values of the solution (12) are shown in Table 1 for $\lambda = 1/12$, $1/75$ and $1/300$.

At distances such that $\kappa r \gg 1$, equation (12) takes the form

$$(13) \quad J(r) \sim \frac{3\kappa Q \varpi_0 e^{-kr}}{r} \frac{\beta}{2} \log \left| \frac{\beta+1}{\beta-1} \right|$$

where $\beta = 1/\sqrt{3\lambda}$.

For high scattering (k small), this becomes

$$(14) \quad J(r) \sim \frac{3\kappa Q e^{-kr}}{r}$$

which is the solution of equation (4), with P equated to zero. This limiting form of the solution for a point source in an infinite medium is well known.

TABLE 1

Point Source Illumination

kr	$\lambda = 1/12$	$\lambda = 1/75$	$\lambda = 1/300$
0	∞	∞	∞
0.1	1.728	1.168	0.763 0
0.2	1.133	0.678 0	0.391 5
0.4	0.614 5	0.318 8	0.167 1
0.6	0.392 8	0.181 8	0.091 6
0.8	0.260 8	0.113 0	0.056 2
1.0	0.184 5	0.074 4	0.036 9
1.2	0.122 0	0.050 8	0.025 2
1.4	0.090 8	0.035 7	0.017 7
1.6	0.066 1	0.025 6	0.012 7
1.8	0.048 7	0.018 6	0.009 2
2.0	0.036 2	0.013 8	0.006 8

Values of $J/3\kappa^2 Q \varpi_0$ as a function of kr for various values of λ .

III. Line source illumination. — Consider a "transparent" line source emitting energy at a rate $4\pi Q$ per unit length and take the source as the z axis of a cylindrical coordinate system. The quantity P will be a function of ρ only and may be calculated as follows.

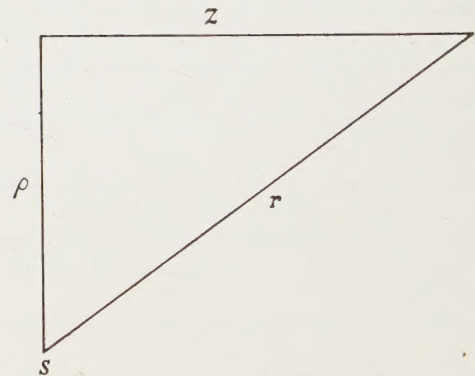


FIG. 1.

The radiation emitted per unit solid angle per second from unit volume at the point S (fig. 1) due to scattering of radiation from dz is

$$\frac{Q dz \sigma e^{-\kappa r}}{4\pi r^2}$$

where $\sigma = \varpi_0 \kappa$ is the scattering coefficient. The function $P(\rho)$ is then given by

$$(15) \quad P(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q \varpi_0}{4 \pi} \frac{e^{-\kappa r}}{r^2} dz = \\ = \frac{2 Q \varpi_0}{4 \pi} \int_{\rho}^{\infty} \frac{e^{-\kappa r}}{r \sqrt{r^2 - \rho^2}} dr$$

or, in an equivalent form,

$$(16) \quad 4 \pi P(\rho) = \frac{2 Q \varpi_0}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa \rho \cosh u}}{\cosh u} du.$$

The transfer equation (4) then becomes, in cylindrical coordinates :

$$(17) \quad \frac{d^2 J}{d \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d J}{d \rho} = k^2 J - \frac{C'}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa \rho \cosh u}}{\cosh u} du$$

with $k = \sqrt{3 \lambda \kappa}$ and $C' = 6 \kappa^2 Q \varpi_0$.

The solution of this equation may be found in a similar manner to that used above ; thus

$$(18) \quad J(\rho) = C' K_0(k \rho) \int_{a_1}^{\rho} I_0(k \xi) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa \xi \cosh u}}{\cosh u} du d\xi - \\ - C' I_0(k \rho) \int_{a_2}^{\rho} K_0(k \xi) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa \xi \cosh u}}{\cosh u} du d\xi.$$

K_0 and I_0 being the BESSEL functions of purely imaginary argument and order zero.

The boundary conditions are that as $\rho \rightarrow \infty$, $J \rightarrow 0$ and, as $\rho \rightarrow 0$, the radial flux

$$F(\rho) = -\frac{1}{3 \kappa} \frac{d J}{d \rho} \rightarrow \frac{2 Q \varpi_0 \kappa}{\rho} \int_0^{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa \xi \cosh u}}{\cosh u} du d\xi \\ \rightarrow \pi Q \kappa \varpi_0.$$

These are easily found to require respectively that $a_2 = \infty$ and $a_1 = 0$ so that the solution (18) appropriate to this problem becomes :

$$(19) \quad J(\rho) = C' K_0(k \rho) \int_0^{\rho} I_0(k \xi) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa \xi \cosh u}}{\cosh u} du d\xi + \\ + C' I_0(k \rho) \int_{\rho}^{\infty} K_0(k \xi) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\kappa \xi \cosh u}}{\cosh u} du d\xi.$$

Numerical values of the solution (19) are shown in Table 2 for $\lambda = 1/12, 1/75, 1/300$.

TABLE 2

Line Source Illumination

$k\rho$	$\lambda = 1/12$	$\lambda = 1/75$	$\lambda = 1/300$
0	1.792	2.554	3.148
0.1	1.520	2.010	2.306
0.2	1.304	1.595	1.735
0.4	0.970	1.065	1.118
0.6	0.733	0.755	0.781
0.8	0.560	0.560	0.567
1.0	0.430	0.427	0.422
1.2	0.335	0.323	0.319
1.4	0.260	0.247	0.245
1.6	0.205	0.190	0.189
1.8	0.160	0.148	0.146
2.0	0.125	0.116	0.114

Values of $J/6 \kappa Q \varpi_0$ as a function of $k\rho$ for various values of λ .

For ρ large, (19) takes the form

$$(20) \quad J \simeq (6 \kappa Q \varpi_0 \beta/2) \log \left| \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \right| K_0(k \rho)$$

which has an interesting resemblance to the corresponding solution (13) for a point source of radiation. For high scattering, β is large and (2) assumes the well known limit.

$$(21) \quad J \simeq 6 \kappa Q \varpi_0 K_0(k \rho)$$

which is the solution of (1) with P equated to zero for a line source in an infinite medium.

Acknowledgement. — The author is indebted to Dr R. G. GIOVANELLI for helpful criticism and clarification of certain points in the argument.

Note added in proof. — It has been drawn to the attention of the author that a similar problem to that considered here has been discussed by R. W. DITCHBURN (*Proc. Roy. Irish Acad.* 41 A, 1933, 47) using a SCHUSTER-SCHWARZSCHILD approximation for the solution of the transfer equation.

REFERENCES

- [1] S. CHANDRASEKHAR, *Radiative Transfer*. Oxford Univ. Press, 1950.
- [2] A. R. FORSYTH, *A Treatise on Differential Equations*. Macmillan and Co., London, 1951.

Manuscrit reçu le 4 février 1955.

Transmissions des fréquences spatiales dans les systèmes récepteurs d'ondes courtes

JACQUES ARSAC,

Laboratoire de Physique de l'Ecole Normale supérieure

SOMMAIRE. — Une étude des procédés d'observation utilisés en radioastronomie, et particulièrement des réseaux d'antennes, conduit à des résultats analogues à ceux de l'optique instrumentale classique. Si l'on décompose la fonction à étudier en fréquences spatiales, on montre qu'une antenne opère comme un filtre pour ces fréquences, et peut être caractérisée par une bande passante. La limitation de celle-ci fait que le résultat d'une observation n'est pas la fonction à étudier elle-même, mais un polynôme trigonométrique qui en réalise une approximation.

L'étude des réseaux établit que ceux-ci transmettent autant d'harmoniques distincts qu'il y a de distances distinctes entre antennes du réseau prises deux à deux de toutes les manières possibles. Ceci conduit à chercher des réseaux d'antennes, que nous appelons incomplets, formés d'un nombre donné d'antennes, et transmettant le maximum possible d'harmoniques. Avec 4 antennes on transmet 6 harmoniques. Le résultat de l'observation est alors la somme de FOURIER d'ordre 6 de la fonction observée. De tous les réseaux transmettant 6 harmoniques, c'est celui-là qui fournit la meilleure approximation quadratique moyenne. Avec un nombre plus grand d'antennes, le résultat obtenu n'est plus une somme de FOURIER, mais on peut l'y ramener par une transformation linéaire. L'utilisation de tels réseaux permet de tirer le meilleur parti des antennes dont on dispose, car, sans diminuer la luminosité, elle permet d'augmenter le nombre d'harmoniques transmis (par exemple 286 au lieu de 32 avec 32 antennes). Inversement elle permet de réduire au minimum le nombre d'antennes nécessaires à l'obtention d'un nombre donné d'harmoniques (perte de luminosité mais économie de matériel).

La considération de certains réseaux incomplets permet de montrer que l'on peut améliorer le pouvoir séparateur de certaines antennes en les faisant interférer avec d'autres plus petites convenablement disposées.

On montre en conclusion que la notion de lobe secondaire n'est pas la plus importante dans la réalisation d'une antenne.

ZUSAMMENFASSUNG. — Eine Untersuchung der Beobachtungsverfahren, die in der Radioastronomie üblich sind und insbesondere von Antennengittern führt auf Ergebnisse, die denen der klassischen Instrumentaloptik analog sind. Die FOURIER-Zerlegung der zu untersuchenden Funktion zeigt, dass die Antenne für diese Frequenzen wie ein Filter wirkt, und sie kann durch eine Bandbreite gekennzeichnet werden. Wegen der endlichen Ausdehnung dieser Bandbreite liefert das Beobachtungsergebnis nicht die gesuchte Funktion selbst sondern ein trigonometrisches Polynom das lediglich eine Annäherung darstellt.

Eine genauere Untersuchung der Gitter zeigt, dass sie ebensovielen verschiedenen FOURIER-Komponenten übertragen wie es unterschiedliche Abstände zwischen den Antennen des Gitters gibt, wenn man sie auf jede mögliche Art paarweise zusammenfasst. Das führt dazu, Antennengitter zu suchen — wir nennen sie unvollständige Gitter — die aus einer gegebenen Zahl von Antennen aufgebaut sind und möglichst viele FOURIER-Komponenten liefern. Mit 4 Antennen bekommt man deren sechs. Das Ergebnis der Beobachtung ist also die FOURIER-Summe sechster Ordnung der Beobachtungsfunktion. Es ist von allen Gittern, die 6 Oberschwingungen liefern, gerade dasjenige, welches die beste mittlere quadratische Annäherung ergibt. Mit einer grösseren Zahl von Antennen erhält man nicht mehr eine FOURIER-Summe, aber man kann das Ergebnis durch eine lineare Transformation darauf zurückführen. Die Anwendung solcher Gitter erlaubt, einen möglichst vorteilhaften Gebrauch von den vorhandenen Antennen zu machen. Denn man kann, ohne die Helligkeit herabzusetzen, die Zahl der übertragenen harmonischen Komponenten erhöhen (z. B. 286 anstelle von 32 mit 32 Antennen). Umgekehrt lässt sich die Zahl der Antennen, die nötig ist, um eine gegebene Anzahl von FOURIER-Komponenten zu bekommen, auf ein Minimum herabsetzen (Lichtverlust aber Materialersparnis).

Die Betrachtung einiger unvollständiger Gitter lässt erkennen, dass die Trennschärfe gewisser Antennenanordnungen verbessert werden kann, wenn man sie mit anderen, kleineren Anordnungen geeigneter Verteilung zusammenwirken lässt.

Schliesslich zeigt sich, dass bei der Herstellung einer Antenne das sekundäre Maximum nicht von ausschlaggebender Bedeutung ist.

SUMMARY. — A study of the observation procedures used in radioastronomy, and particularly arrays of aeriels, leads to results analogous to those of classical instrumental optics. If the function under investigation be decomposed into spacial frequencies, it is shown that an aerial acts as a filter for these frequencies, and has a characteristic band-pass. The limitation of this leads to the fact that the result of an observation is not the actual function investigated, but a trigonometrical polynomial approximation to it.

It is shown that an array of aeriels transmits as many distinct harmonics as there are distinct distances between the aeriels of the array taken two at a time in all possible ways. This leads to a search for aerial arrays, which we call incomplete, formed of a given number of aeriels and transmitting the maximum number of harmonics. With 4 aeriels 6 harmonics are transmitted. The result of the observation is then the sixth order FOURIER sum of the observed function. Of all arrays transmitting 6 harmonics, this gives the best meansquare approximation. With a greater number of aeriels the result obtained is no longer a FOURIER sum, but it can be given this form by a linear transformation. The use of such arrays permits the best use to be made of the aeriels available, for, without loss of intensity, it allows the number of harmonics transmitted to be increased (e. g. 286 in place of 32 with 32 aeriels). Inversely a given number of harmonics may be obtained with a reduced number of aeriels (loss of intensity but economy of material).

A consideration of certain incomplete arrays shows that the resolving power of certain aeriels can be increased by making them interfere with other smaller ones suitably arranged.

It is shown that the concept of secondary lobe is not of primary importance in an aerial.

Un des problèmes importants de la radioastronomie est l'observation de la répartition de brillance radio-électrique sur la surface de la sphère céleste. Elle se fait à l'aide d'antennes qui captent l'énergie électromagnétique d'une certaine fréquence et de récepteurs qui mesurent l'énergie captée. Si l'on s'arrange pour que l'antenne ne transmette au récepteur, de toute l'énergie qui lui parvient, que celle qui est contenue

dans un petit angle solide ω , on a la possibilité de mesurer l'énergie émise par une petite portion de la sphère céleste, c'est-à-dire la brillance de cette portion. Or, si l'on veut que cet angle solide ait pour demi-angle au sommet θ , il faut que l'antenne ait des dimensions de l'ordre de $a = \lambda/\theta$ d'autant plus grandes que λ est plus grand et θ plus petit. C'est dans ce but qu'ont été réalisés les miroirs paraboliques géants :

15 m de diamètre pour $\lambda = 1$ cm en Amérique, 25 m pour $\lambda = 20$ cm en Hollande ; 75 m pour $\lambda = 20$ cm en construction en Angleterre.

Mais la difficulté de réalisation de ces grandes antennes est telle que l'on renonce souvent à obtenir une antenne directive dans toutes les directions. On se contente d'une antenne directive dans un seul plan. Une seule de ses directions est très grande. On mesure non l'énergie émise par une petite surface, mais celle d'une petite bande perpendiculaire au plan de directivité de l'antenne [1].

La réalisation en étant encore délicate, on fait appel aux méthodes interférentielles :

Méthode de MICHELSON à 2 antennes (proposée par PAWSEY et utilisée surtout par RYLE [2, 3]).

Interféromètres à plusieurs antennes, tel le réseau utilisé par CHRISTIANSEN [4]. Ces réseaux ne valent que pour l'étude d'astres brillants sur fond sombre, car la présence de plusieurs lobes principaux n'est acceptable que si un seul d'entre eux reçoit de l'énergie : le diamètre apparent de l'astre doit être inférieur à la distance de 2 lobes.

De toute manière il n'est pas possible d'obtenir que l'antenne ne reçoive d'énergie que d'une portion limitée de la sphère céleste ; elle en reçoit de tout l'espace, mais la transmet au récepteur avec une intensité variable. On estime que l'antenne la meilleure est celle pour laquelle le lobe principal est le plus étroit possible et les lobes secondaires les plus faibles possible. DOLPH a calculé un type d'antennes optimum [5] à largeur de lobe principal donné, il a les lobes secondaires les plus petits possible, à niveau de lobe secondaire donné, il a le lobe principal le plus étroit possible. Nous ne pensons pas toutefois que cette manière de concevoir le problème fournisse les meilleures solutions.

Equations du problème. — Rappelons la définition du gain d'une antenne : une onde électromagnétique plane de flux d'énergie unité arrivant sur l'antenne dans une direction repérable par 2 variables θ, φ , dans des axes liés à l'antenne, celle-ci transmet au récepteur une énergie $G(\theta, \varphi)$. Si l'antenne n'est directive que dans un seul plan, $G(\theta, \varphi)$ est indépendant de φ . Nous appellerons « gain de l'antenne » la fonction $g(\theta) = G(-\theta)$.

Avec une telle antenne, on ne peut mesurer la brillance en chaque point, on ne peut connaître que la fonction

$$f(\theta) = \int B(\theta, \varphi) d\varphi.$$

Nous prendrons pour variable θ l'écart angulaire sur un grand cercle de la sphère céleste θ étant la position de l'axe de l'antenne, l'énergie $f(\psi) d\psi$ émise par une tranche de largeur $d\psi$ à l'abscisse ψ est reçue avec un gain $G(-\theta + \psi) = g(\theta - \psi)$. Au total :

$$(a) \quad P(\theta) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\psi) g(\theta - \psi) d\psi.$$

C'est l'équation de la formation d'une image par

un instrument d'optique. L'interprétation d'une telle équation est classique [6]. Si l'on appelle $T(f)$ la transformée de FOURIER de la fonction f , la relation (a) équivaut à

$$(b) \quad T(P) = T(f) \cdot T(g).$$

De plus si $A(x)$ est la répartition d'amplitude pupillaire

$$(c) \quad T(g) = \int A(x) \cdot \check{A}(x - u) dx.$$

Nous ne pouvons utiliser sans précautions de tels résultats. Dans le cas qui nous intéresse, les fonctions f et g sont périodiques de période 2π . La transformée de FOURIER de l'une d'elle

$$T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) e^{2\pi i u \theta} d\theta$$

est nulle si $u \neq p/2\pi$ et infinie si $u = p/2\pi$. On ne peut la considérer comme une véritable fonction. Il faudrait faire intervenir la théorie des distributions [7].

Etant donnée la périodicité de f et g , il y a lieu de les considérer comme des séries de FOURIER.

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_p e^{ip\theta} ; \quad \alpha_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) e^{-ip\theta} d\theta ;$$

α_p apparaît comme la valeur pour l'argument $u = p/2\pi$ de la transformée de FOURIER de la fonction égale à f si $|\theta| \leq \pi$, nulle si $|\theta| > \pi$.

Il est donc inutile de faire intervenir une fonction $T(f)$, une série discrète de valeurs suffit. Il en est de même pour $g(\theta)$.

Mais nous ne pourrions pas en général considérer les α_p comme les valeurs pour certains arguments de la fonction définie par (c). La théorie des antennes donne en effet :

$$g(\theta) = \left| \int_{-a}^{+a} I(x) e^{\frac{2\pi i x \sin \theta}{\lambda}} dx \right|^2.$$

Sauf pour des antennes telles que l'on puisse négliger $g(\theta)$ pour des valeurs même petites de θ (ce sera moyennant certaines précautions le cas des réseaux) nous ne pouvons assimiler θ et $\sin \theta$ dans cette équation sans introduire d'erreur. Si l'on développe $e^{iZ \sin \theta}$ en série de FOURIER

$$e^{iZ \sin \theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_k(Z) e^{ik\theta},$$

il vient

$$\alpha_p = \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} I(x) I^*(y) J_p \left(2\pi \frac{y-x}{\lambda} \right) dx dy.$$

Une conséquence importante de ceci est que les coefficients α_p deviennent négligeables à partir d'un certain rang, mais non rigoureusement nuls [comme on l'aurait déduit de (c)]. C'est pour cela qu'il est possible de réaliser des antennes superdirectives pour lesquelles la largeur du lobe principal est inférieure

à la valeur λ/a . On sait [8] que de telles antennes ont un tel facteur de surtension qu'elles sont inutilisables en pratique.

De toute manière, la précision des mesures étant limitée, on ne peut connaître les valeurs de a_p au delà d'un certain rang, car elles deviennent de l'ordre des erreurs de mesure. La suite des a_p est donc limitée. Au total :

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_p e^{i p \theta},$$

$$g(\theta) = \sum_{-N}^{+N} a_p e^{i p \theta}, \quad P(\theta) = \sum_{-N}^{+N} a_p \alpha_p e^{i p \theta}.$$

Une antenne apparaît ainsi comme un filtre de fréquences d'espace, transmettant un certain nombre d'harmoniques de la fonction $f(\theta)$, en modifiant leur amplitude et leur phase. La suite des a_p joue pour une antenne le même rôle que la bande passante pour un amplificateur. Nous l'appellerons « bande passante spatiale » de l'antenne.

Considérons un astre de diamètre apparent inférieur ou au plus égal à 2β sur fond sombre. La fonction $f(\theta)$ correspondante est nulle si $|\theta| > \beta$. On pourra la représenter par

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_p e^{\frac{i p \pi \theta}{\beta}} \quad \text{si } |\theta| \leq \beta$$

$$= 0 \quad \text{si } |\theta| > \beta.$$

Les seuls harmoniques nécessaires à la connaissance de $f(\theta)$ sont ceux de rang $\frac{p\pi}{\beta}$. Or un réseau d'antennes omnidirectionnelles, de gain c_p à des abscisses multiples entières d'une même longueur fondamentale à $x_p = E_p a$ a pour gain

$$g_R(\theta) = \left| \sum_1^K c_p e^{\frac{2\pi i E_p a \sin \theta}{\lambda}} \right|^2.$$

Pour θ petit, on peut confondre $g_R(\theta)$ avec

$$g(\theta) = \left| \sum_1^K c_p e^{\frac{2\pi i E_p a \theta}{\lambda}} \right|^2$$

$g(\theta)$ est périodique de période λ/a . Si a/λ est assez grand, on pourra confondre θ et $\sin \theta$ pour $|\theta| \leq \lambda/2a$, c'est-à-dire sur une période de $g(\theta)$. On peut donc substituer à la fonction $g_R(\theta)$ la fonction $g(\theta)$ définie comme suit :

1° $|\theta| \leq \lambda/2a$, $g = g_R$.

2° $g(\theta)$ est périodique de période λ/a .

g est un polynôme trigonométrique de rang N

$$g(\theta) = \sum_{-N}^{+N} a_p e^{\frac{2\pi i p a \theta}{\lambda}}.$$

Si $a/\lambda = 1/2\beta$ les harmoniques transmis par le réseau sont ceux suffisant à la détermination de $f(\theta)$. En résumé :

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_p e^{\frac{i p \pi \theta}{\beta}} \quad |\theta| < \beta$$

$$g(\theta) = \sum_{-N}^{+N} a_p e^{\frac{i p \pi \theta}{\beta}}$$

$$\rho(\theta) = \sum_{-N}^{+N} a_p \alpha_p e^{\frac{i p \pi \theta}{\beta}}.$$

Etude de l'approximation réalisée. Nous ne pouvons connaître $f(\theta)$. Nous l'approchons par $P(\theta)$, polynôme trigonométrique d'ordre N . $P(\theta)$ réalise un procédé de sommation de $f(\theta)$ [9]. On sait que le procédé de FOURIER fournit la meilleure approximation quadratique moyenne mais non forcément la meilleure approximation en tout point. TOEPLITZ a introduit de manière systématique les procédés de sommation : si l'on a

$$T_N(\gamma, \theta) = \sum_{-N}^{+N} \gamma_N^k \alpha_K e^{i k \theta}$$

sous des conditions très générales $\lim_{N \rightarrow \infty}$

$$T_N(\gamma, \theta) = f(\theta).$$

Les résultats de l'analyse peuvent se résumer ainsi : ε étant le maximum de $|T - f|$ sur l'intervalle 2π , on peut trouver un procédé de sommation rendant ε minimum. Mais ce procédé dépend de la fonction $f(\theta)$. D'autre part le procédé de FOURIER est le seul reproduisant sans erreur un polynôme trigonométrique d'ordre inférieur à $N+1$. Ces résultats sont rappelés et mis en valeur dans un récent travail de J. C. SIMON [10]. Devant l'impossibilité pour nous d'adopter un critère d'erreur locale, nous adopterons le critère de l'erreur quadratique moyenne.

On rendra minimum cette erreur par le choix de la somme de FOURIER. $a_p = 1$. La fonction $g(\theta)$ résul-

$$\text{tante est } g(\theta) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}. \text{ Comme elle peut}$$

prendre des valeurs négatives, elle est inacceptable. On lève la difficulté en acceptant que P et f puissent différer d'une constante additive et d'une constante multiplicative (on se contente de mesures relatives ou l'on fait un étalonnage). On peut alors calculer l'écart quadratique moyen entre f et $A + BP$, et choisir A et B de manière à le rendre minimum. Le résultat est le suivant :

$$\overline{E}^2 = \overline{E}_0^2 + \overline{E}_s^2$$

$$\overline{E}_s^2 = \sum |\alpha_p|^2 - \frac{(\sum x_p |\alpha_p|^2)^2}{\sum (x_p^2 + y_p^2) |\alpha_p|^2} \quad p \neq 0$$

$$\overline{E}_0^2 = \sum |\alpha_p|^2 \quad |p| \leq N$$

$$\text{avec } a_p = x_p + i y_p. \quad |p| > N$$

\bar{E}_0^2 est un écart inévitable dû au nombre limité d'harmoniques transmis. On constate que l'on diminue toujours l'erreur supplémentaire due à la forme de la bande passante spatiale en prenant $y_p = 0$ c'est-à-dire $g(\theta)$ paire. En limitant notre discussion à ce cas là, il reste :

$$\bar{E}_s^2 = \sum |\alpha_p|^2 - \frac{(\sum a_p |\alpha_p|^2)^2}{\sum a_p^2 |\alpha_p|^2} \quad \begin{matrix} p \neq 0 \\ |p| \leq N \end{matrix}$$

Cette expression est nulle si tous les a_p sont égaux. Mais a_0 ne figurant pas dans cette expression, on peut le choisir de manière à rendre $g(\theta)$ constamment positive. On peut calculer une antenne répondant à ces conditions. Le problème admet du reste plusieurs solutions.

De toute manière, il est possible d'éliminer par un calcul l'intervention de la forme de la bande passante spatiale. En jouant sur le fait que $P(\theta)$ est un polynôme trigonométrique d'ordre N , on peut calculer à partir de la donnée de $P(\theta)$ les coefficients $a_p \alpha_p$. Si a_p est différent de zéro, on peut diviser par a_p et reconstituer le polynôme de meilleure approximation quadratique moyenne.

$$\text{Si l'on pose } h(\varphi) = \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N \frac{1}{a_p} e^{i p \varphi}, \quad \varphi = \frac{2\pi a \theta}{\lambda},$$

$h(\varphi)$ est un polynôme tel que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} h(\psi) g(\varphi - \psi) d\psi = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \varphi}{(2N+1) \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Alors le polynôme de meilleure approximation quadratique moyenne est donné par

$$p_0(\varphi) = \sum_{-N}^N p \left(\frac{2q\pi}{2N+1} \right) h \left(\varphi - \frac{2q\pi}{2N+1} \right).$$

Le calcul de $h(\varphi)$ se fait une fois pour toutes puisque $h(\varphi)$ ne dépend que de la constitution de l'antenne. On peut aussi imaginer un dispositif optique faisant la même opération.

Etude des réseaux. — Nous avons vu que moyennant certaines précautions la fonction gain du réseau

$$\text{est donnée par } g(\theta) = \left| \sum_1^N c_p e^{\frac{2\pi i \gamma a \theta}{\lambda}} \right|^2$$

$$\begin{aligned} \text{En posant } \gamma(\theta) &= \sum_1^N c_p e^{\frac{2i\pi p a \theta}{\lambda}}, \quad g(\theta) = \gamma(\theta) \cdot \gamma^*(\theta) = \\ &= g(\theta) - \sum_p \sum_q c_p c_q e^{\frac{2\pi i (p-q)a \theta}{\lambda}} \end{aligned}$$

en nous limitant au cas où les coefficients c_p sont réels.

Par conséquent, deux antennes quelconques du réseau fournissent un harmonique de rang proportionnel à leur distance avec une amplitude égale au produit de leur gain.

Un réseau transmet autant d'harmoniques distincts qu'il y a de distances différentes entre antennes du réseau prises deux à deux, de toutes les manières possibles. Considérons par exemple le réseau uniforme formé d'antennes identiques aux abscisses $0, 1, 2, \dots, N$. L'harmonique de rang 1 est réalisé de $N-1$ manière différentes (puisque la distance 1 est obtenue entre deux antennes consécutives), chaque fois avec l'amplitude 1 (puisque toutes les antennes ont même gain). De même, l'harmonique de rang p a l'amplitude $N-p$. Il en résulte que le réseau uniforme forme la somme de FÉJÉR d'ordre N de $f(\theta)$. Pour des fonctions très rapidement variables (dans l'espace) le phénomène de GIBBS est moindre que celui dû à la somme de FOURIER, mais les variations rapides de $f(\theta)$ sont moins bien reproduites.

On peut se proposer de réaliser un réseau, formé d'antennes toutes identiques (dans un but de simplicité de réalisation : il est très difficile d'ajuster des gains d'antennes dans un rapport donné et cela entraîne une perte d'énergie) et tel que toutes les distances entre antennes soient distinctes. Chaque harmonique transmis par le réseau l'est alors une seule fois, et comme toutes les antennes ont même gain, tous les harmoniques sont transmis avec la même amplitude. De plus on utilise au mieux les antennes du réseau car aucune autre combinaison ne peut permettre d'obtenir plus d'harmoniques.

On est ramené à un problème d'arithmétique. Former une suite d'entiers E_1, E_2, \dots, E_K , telle que les différences positives de ces entiers deux à deux $d_{ij} = E_j - E_i$ donnent, sans omission ni répétition, la suite des entiers de 1 à N .

Avec 4 entiers on obtient la solution 0, 1, 4, 6. Si le nombre K d'antennes est supérieur à 4, le problème n'admet pas de solution. Supposons en effet que l'on ait pu en trouver une. Avec K antennes on peut obtenir $\frac{K(K-1)}{2}$ distances distinctes :

$$\begin{aligned} a_p &= 1 \text{ si } |p| \leq \frac{K(K-1)}{2}, \\ a_p &= 0 \text{ si } |p| > \frac{K(K-1)}{2}. \end{aligned}$$

La distance 0 est réalisée K fois : $a_0 = K$.

$$\text{Alors } g(\theta) = K - 1 + \frac{\sin \frac{K^2 - K + 1}{2} \frac{2\pi a \theta}{\lambda}}{\sin \frac{2a \theta}{\lambda}}.$$

pour $K > 4$ et $\frac{\pi a \theta}{\lambda} = \frac{3\pi}{2(K^2 - K + 1)}$ cette fonction est négative, donc le problème n'admet effectivement pas de solution.

On peut néanmoins chercher à réaliser des réseaux incomplets (dérivant du réseau uniforme par la suppression d'un certain nombre de ses antennes) afin de n'utiliser que le nombre d'antennes strictement nécessaire à l'obtention d'un nombre donné d'harmoniques.

La bande passante spatiale ne pourra pas être constante. Puisque les différences d_{ij} ne peuvent reproduire la suite des entiers de 1 à $\frac{K(K-1)}{2}$, la suite de ces différences présentera des omissions ou des répétitions. On ne peut accepter d'omission ; nous avons vu que l'on ne pouvait reconstituer le polynôme de meilleure approximation que si les a_p étaient différents de 0.

Le problème est alors de former une suite d'entiers E_1, E_2, \dots, E_k telle que les différences positives de ces entiers deux à deux reproduisent sans omission, mais peut-être des répétitions, la suite des entiers de 1 à N , N étant le plus grand possible. Un tel problème n'a pas reçu de solution. Nous en avons recherché les premières solutions. On trouve ainsi :

$K = 4$	$N = 6$	0 répétition
$K = 5$	$N = 9$	1 répétition
$K = 6$	$N = 13$	2 répétitions
$K = 7$	$N = 17$	4 répétitions
$K = 8$	$N = 23$	5 répétitions
$K = 9$	$N = 29$	7 répétitions
$K = 10$	$N = 36$	9 répétitions.

On peut obtenir une borne inférieure de N .

La suite $0, 1, 2, \dots, n, 2n+2, 3n+4, \dots, n+p(n+2), \dots, n+(n-1)(n+2), n^2+3n-1$ fournit la suite des différences de 1 à n^2+3n-1 .

On peut donc affirmer que $N > \frac{K^2 + 4K - 9}{4}$.

Mais pour $K = 10$ cette borne donne $N = 33$ alors que nous avons pu obtenir $N = 36$; de même pour $K = 11$, elle donne $N = 39$ alors que $0, 1, 3, 6, 13, 20, 27, 34, 38, 43$ est une solution possible (nous ne pouvons pas affirmer que cette suite fournisse le nombre maximum d'harmoniques possible).

De toute manière il est certain que le nombre d'harmoniques que l'on peut transmettre avec un nombre K d'antennes suffisamment grand est de l'ordre de $\frac{K^2}{4}$. Ainsi avec 32 antennes, la répartition uniforme

utilisée par CHRISTIANSEN lui a permis d'obtenir 32 harmoniques, alors qu'une disposition différente aurait permis d'en obtenir 286 au moins.

Les réseaux incomplets que nous venons de décrire ne fournissent pas la meilleure approximation quadratique moyenne. Pour en tirer pleinement parti, il faut faire subir une transformation linéaire à $P(\theta)$.

Il faut considérer la méthode comme un compromis entre l'interférométrie à 2 antennes et l'observation par les grandes antennes.

Comme l'interférométrie, elle fournit un certain nombre d'harmoniques de la fonction $f(\theta)$, mais elle les fournit tous dans un temps très court (le temps de passage de l'astre devant un des lobes du réseau). Elle permet l'étude de fonctions relativement rapidement variables dans le temps, car il suffit qu'elle soit constante pendant le temps de passage. La méthode

est utilisable pour le Soleil en présence de taches, mais non avec des « bursts ».

La réalisation de la mise en phase des antennes d'un réseau incomplet étant la même que pour un réseau complet, on peut réaliser une telle opération. On est sûr alors des phases des différents harmoniques de la fonction $f(\theta)$, chose qu'il est pratiquement impossible d'obtenir avec l'interférométrie.

Le résultat $P(\theta)$ est une approximation souvent acceptable de $f(\theta)$. Si l'on veut corriger l'intervention de la bande passante spatiale on est conduit à des calculs qui n'exigent pas plus d'opérations que le dépouillement de l'interférométrie. Ces calculs sont utiles même avec une antenne continue (miroirs ou réseaux uniformes) si l'on veut en tirer le meilleur parti.

Si l'on se donne a priori un certain nombre d'antennes, le réseau irrégulier transmet un plus grand nombre d'harmoniques que le réseau uniforme. Une disposition irrégulière permet donc l'obtention, avec le même matériel et dans les mêmes conditions (par exemple même distance entre lobes principaux) d'un meilleur pouvoir séparateur. La « luminosité » est la même que pour le réseau uniforme puisqu'elle ne dépend que du nombre d'antennes. Si l'on dispose a priori d'un nombre donné d'antennes et d'une place donnée, la disposition irrégulière permet de choisir pour le réseau une longueur fondamentale a plus petite. Elle permet l'exploration de zones plus complexes et plus étendues de la sphère céleste.

Le réseau 0, 1, 4, 6. — Il convient de faire une place à part à ce réseau. Il transmet en effet avec une amplitude égale les 6 premiers harmoniques de $f(\theta)$. C'est le seul réseau incomplet parfait. Du point de vue de l'approximation quadratique moyenne, c'est la meilleure des antennes de même longueur que l'on puisse réaliser. Toute transformation sur $P(\theta)$ en vue d'améliorer la précision s'avère inutile.

Nous avons expérimenté un tel réseau pour l'étude du Soleil en ondes centimétriques de longueur $\lambda = 3,2$ cm. Les antennes du réseau sont des miroirs paraboliques de 1,10 m de diamètre. Elles sont telles que leur directivité est 2° dans le plan méridien et 7° dans un plan perpendiculaire. La distance fondamentale du réseau est $a = 58 \lambda$ (185 cm). La longueur du réseau est 11,10 m. Son pouvoir séparateur est sensiblement de $6'$. Il est supérieur d'environ 20 % à celui d'un miroir cylindro-parabolique de même longueur.

Nous donnons (fig. 1) la courbe représentative de $g(\theta)$ pour un tel réseau et sur le même graphique celle relative au réseau uniforme à 7 antennes transmettant le même nombre d'harmoniques. On constate pour le réseau incomplet de très forts lobes secondaires (30 % du lobe principal au lieu de 4,5 % pour le réseau uniforme). Le réseau incomplet apparaît ainsi comme une antenne désapodisée par rapport aux antennes classiques. Ceci va à l'encontre des recherches classiques à ce sujet qui tendent à une

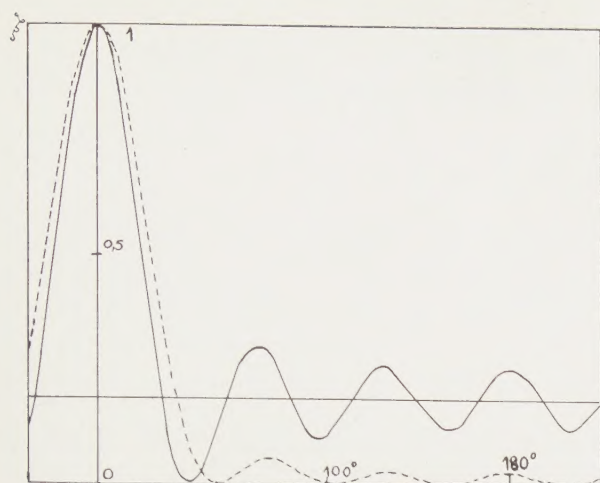


FIG. 1. — $\frac{g(\varphi)}{g(0)} ; \varphi = \frac{2\pi a \theta}{\lambda}$.
 — réseau 0, 1, 4, 6.
 ... réseau 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

réduction des lobes secondaires même au prix d'un petit élargissement du lobe principal.

Nous donnons aussi (fig. 2) l'enregistrement du passage du Soleil devant une telle antenne. Sur la partie centrale, nous avons superposé plusieurs passages à des jours différents. Vues les très faibles énergies reçues, l'intervention du bruit de fond est considérable (le signal reçu est lui-même de la nature du bruit).

Solutions mixtes. — Entre le réseau où l'on a réduit au minimum le nombre d'antennes nécessaires à l'obtention d'un certain nombre d'harmoniques et le réseau uniforme qui possède le nombre maximum d'antennes pour la transmission du même nombre

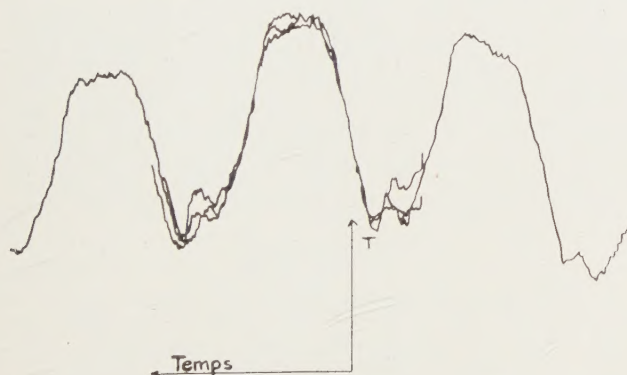


FIG. 2.

d'harmoniques, il y a place pour un grand nombre de solutions où le nombre d'antennes est intermédiaire entre ceux des solutions extrêmes. Lorsque l'on augmente le nombre d'antennes en maintenant constant le nombre d'harmoniques, le niveau des lobes secondaires décroît progressivement pour tendre vers la limite 4,5 % du réseau uniforme. Il semble du reste que la décroissance soit beaucoup plus rapide au début.

La bande passante spatiale se déforme elle aussi progressivement pour tendre vers la bande en « triangle » du réseau uniforme.

Certaines de ces solutions mixtes peuvent toutefois conduire à des solutions nouvelles. Ainsi pour transmettre 23 harmoniques il faut 8 antennes (par exemple 0, 1, 4, 10, 16, 18, 21, 23). Si l'on en utilise 9 on obtient la solution 0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 17, 23. Or ce réseau dérive du réseau uniforme 0, 1, 2, 3, 4, 5 à 6 antennes, transmettant 5 harmoniques, par l'adjonction de 3 nouvelles antennes qui apportent 18 harmoniques nouveaux. On ne changera pas le résultat en remplaçant le réseau uniforme par une antenne continue de même longueur. On a ainsi la possibilité d'améliorer le pouvoir séparateur d'une grande antenne en la faisant interférer avec des antennes plus petites convenablement disposées. De la même manière le réseau 0, 1, 2, ..., 10, 11, 23 fournit les 23 premiers harmoniques. Il dérive du réseau uniforme 0, 1, 2, ..., 10, 11 par adjonction d'une antenne qui apporte à elle seule 12 harmoniques. On peut améliorer le pouvoir séparateur d'une grande antenne en la faisant interférer avec une antenne plus petite convenablement disposée. Il semble que l'on puisse beaucoup attendre de cette technique en radioastronomie. La dimension des grandes antennes réalisables est en effet déterminée par des considérations de résistance des matériaux, et le plus souvent de prix de revient. On a la possibilité, une fois en possession d'une grande antenne, d'en améliorer les performances par une technique qui ne leur fait pas perdre leur luminosité. Nous donnons (fig. 3) un graphique comparant les propriétés des deux réseaux cités ci-dessus. L'amélioration du pouvoir séparateur est très nette.

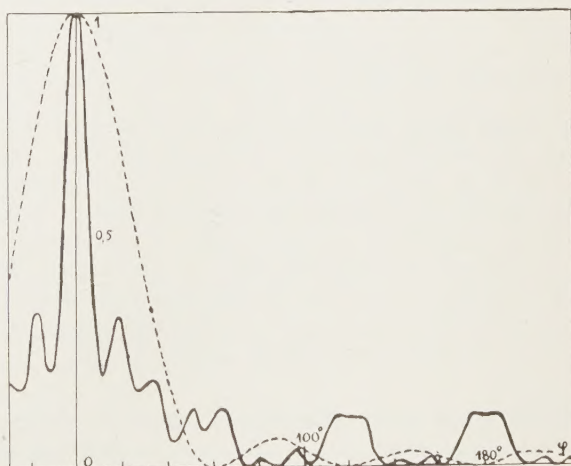


FIG. 3. — $\frac{g(\varphi)}{g(0)} ; \lambda = \frac{2\pi a \theta}{\lambda}$.
 — réseau 0, 1, 2, 3, 4, 5, 11, 17, 23.
 ... réseau 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Dans l'étude qui précède nous n'avons pas envisagé l'intervention d'un certain nombre de facteurs qui viennent modifier légèrement les conclusions précédentes. Les antennes du réseau ne sont pas en général

omnidirectionnelles ainsi que nous l'avons supposé. Elles ont elles-mêmes une certaine bande passante spatiale plus ou moins étendue. Soit $B(u)$ celle-ci (nous remplaçons la succession des valeurs discrètes par une courbe continue, ce qui se fait généralement sans ambiguïté). Les harmoniques transmis par le réseau étant ceux de rang $2\pi p a/\lambda$ (avec l'amplitude a_p)

la bande passante résultante est $\sum_{-N}^{+N} a_p B\left(u - \frac{2\pi p a}{\lambda}\right)$.

La bande passante spatiale d'une des antennes du réseau se trouve répétée autour de chaque harmonique transmis par le réseau. On a ainsi la possibilité d'avoir une bande passante spatiale transmettant tous les harmoniques jusqu'à un certain rang (et non seulement des harmoniques plus espacés de rang $2\pi p a/\lambda$) si la longueur de la bande d'une des antennes est égale à l'intervalle entre deux harmoniques transmis par le réseau.

D'autre part, nous avons supposé au début que la distance fondamentale a entre antennes du réseau était grande par rapport à la longueur d'onde. S'il n'en est pas ainsi, l'assimilation de $g_R(\theta)$ et $g(\theta)$ que nous avons faite n'est plus légitime. Il faut opérer comme nous l'avons fait au début pour les antennes continues : on développe $e^{i z \sin \theta}$ en série de FOURIER. Si l'on considère alors deux réseaux pour lesquels les positions relatives des antennes sont les mêmes, mais qui diffèrent par la valeur de a , on peut passer simplement de la bande passante de l'un à celle de l'autre.

Si a_p est l'amplitude de l'harmonique de rang $2\pi p a/\lambda$ transmis par le réseau pour lequel a est grand devant λ , et a'_p celle de l'harmonique de rang p transmis par un réseau pour lequel $a = \lambda/2$, on a

$$a_p = a_0 J_{2p}(0) + 2 \sum_1^N a_k J_{2p}(k\pi).$$

Il en résulte que la bande passante spatiale d'un réseau de dipôles distants de $\lambda/2$ est relativement plus étendue. Ainsi le réseau 0, 1, 4, 6 transmet 6 harmoniques (de rang $2\pi p a/\lambda$ soit une longueur $12\pi a/\lambda$) alors que le réseau 0, $\lambda/2$, 2λ , 3λ , transmet 20 harmoniques (de rang p soit une longueur 20). La conjugaison des deux phénomènes que nous venons de signaler permet la réalisation d'antennes à lobe unique par association en réseau de petits réseaux de dipôles en $\lambda/2$.

Retour sur la notion de « lobe secondaire ». — Nous avons souligné dans ce qui précède que $g(\theta)$ est un polynôme trigonométrique d'ordre N . Il en résulte que $g(\theta)$ peut être déterminé, de manière unique, par la donnée de $2N + 1$ de ses valeurs. Si l'on prend pour cela les valeurs $g\left(\frac{2q\beta}{2N+1}\right)$ on peut exprimer simplement $g(\theta)$ par

$$g_q = g\left(\frac{2q\pi}{2N+1}\right),$$

$$H(\varphi) = \frac{\sin \frac{2N+1}{2} \varphi}{(2N+1) \sin \frac{\varphi}{2}}, \quad \varphi = \frac{2\pi a \theta}{\lambda} = \frac{\pi \theta}{\beta},$$

$$g(\varphi) = \sum_{-N}^{+N} g_q H\left(\varphi - \frac{2q\pi}{2N+1}\right).$$

L'équation fondamentale donne alors

$$f(\theta) = \sum_{-N}^{+N} g_q S\left(\theta - \frac{2q\beta}{2N+1}\right),$$

$$\text{avec} \quad S(\theta) = \sum_{-N}^{+N} \alpha_p e^{\frac{i p \pi \theta}{\beta}}$$

somme de FOURIER d'ordre N de $f(\theta)$. En définitive c'est cette somme seulement que peut nous donner l'expérience. On constate que ce n'est pas la fonction $g(\theta)$ qui est importante, mais seulement un certain nombre de valeurs de cette fonction. Peu importe que $g(\theta)$ prenne des valeurs importantes si ce n'est

pas en un point d'abscisse $\frac{2q\beta}{2N+1}$.

Ainsi l'antenne $g_0 = 16$, $g_p = 3$ si $|p| \leq 6$ donne

$$P(\theta) = 13 S(\theta) + \text{constante}$$

(ce cas est celui du réseau 0, 1, 4, 6).

Pourtant la fonction $g(\theta)$ correspondante est

$$g(\theta) = 3 + \frac{\sin \frac{13\pi\theta}{2\beta}}{\sin \frac{\pi\theta}{2\beta}}$$

et présente de forts lobes secondaires. Mais ceux-ci se produisent entre les points d'abscisse $\frac{2q\beta}{2N+1}$ et n'interviennent pas dans le résultat.

La technique d'étude que nous venons d'esquisser doit être maniée avec précaution. Elle peut néanmoins rendre de grands services pour l'évaluation de l'erreur possible en un point. Elle met bien en évidence les valeurs utiles de $g(\theta)$ et rejette au second plan la notion de lobe secondaire qui n'est pas finalement la grandeur critique dans la réalisation d'une antenne.

RÉFÉRENCES

- [1] COVINGTON, *Ap. J.* **119**, 1954, p. 569-589.
- [2] PAWSEY, *Proc. of the Roy. Soc. A* **190**, 1947, p. 357.
- [3] STANIER, *Nature* **165**, 1950, p. 354 (et aussi thèse).
- [4] CHRISTIANSEN, *Austr. J. of Phys.* **6**, 1953, p. 262.
- [5] DOLPH, *P. I. R. E.* **34**, 1946, p. 335-348.
- [6] M. DUFFIEUX, *L'intégrale de FOURIER et ses applications à l'optique*, chez l'auteur, Besançon.
- [7] SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Paris, Act. Scientif., Hermann, 1950.
- [8] AIGRAIN, *Onde électrique* **32**, 1952, p. 299.
- [9] HARDY-ROGOSINSKY, *FOURIER series Cambridge tracts in math. and mathematical physics* n° 38, 1950.
- [10] J. C. SIMON, Article non publié.
- [11] J. ARSAC, Thèse de doctorat, Paris, 1955 (à paraître).

Manuscrit reçu le 18 juin 1955.

Influence de la cohérence de l'éclairage sur le contraste de l'image d'un point noir en présence d'un petit défaut de mise au point.

SERGE SLANSKY

Institut d'Optique, Paris.

SOMMAIRE. — Le contraste de l'image d'un point noir sur fond blanc est étudié en fonction du rapport $p = b/a$ des ouvertures numériques du système d'éclairage et de l'instrument d'observation. Pour $p = 1$ si l'instrument est parfaitement stigmatique le contraste est, en première approximation, indépendant de p , et égal au contraste en éclairage cohérent ; par contre, si l'instrument présente un léger défaut de mise au point, le contraste dépend de p et atteint son maximum au voisinage de $p = 0,87$.

Pour $p > 1$, le contraste diminue toujours quand p augmente et pour les très grandes valeurs de p le contraste tend vers sa valeur en éclairage incohérent, qui est environ la moitié du contraste obtenu pour $p = 1$.

ZUSAMMENFASSUNG. — Der Kontrast im Bilde eines dunklen Punktes in hellem Felde wird als Funktion des Verhältnisses $p = b/a$, der numerischen Beleuchtungsapertur zur Apertur des Beobachtungsinstrumentes, untersucht. Wenn man das Instrument als punktförmig abbildend voraussetzt, dann ist der Kontrast für $p \leq 1$ in erster Näherung unabhängig von p und gleich dem Kontrast für kohärente Beleuchtung. Wenn aber das Instrument eine kleine Abweichung von der besten Strahlenvereinigung aufweist, so hängt der Kontrast von p ab und erreicht seinen Höchstwert nahe bei $p = 0,87$. Für $p > 1$ verringert sich der Kontrast immer wenn p zunimmt, und für sehr grosse Werte von p nähert sich der Kontrast dem Wert für inkohärente Beleuchtung, der etwa halb so gross ist wie der für $p = 1$.

SUMMARY. — The contrast of the image of a black point on a white background is studied as a function of the ratio $p = b/a$ of the numerical aperture of the illuminating system to that of the imaging system. For $p \leq 1$, for a perfectly stigmatic instrument the contrast is, to a first approximation, independent of p and equal to the contrast with coherent illumination ; in the presence of a small defect of focus the contrast varies with p , and attains a maximum in the region of $p = 0.87$. For $p > 1$, the contrast decreases and tends toward the value for incoherent illumination, which is about one half that obtained for $p = 1$.

Le calcul du contraste de l'image d'un point noir sur fond blanc conduit, comme on sait, à des résultats différents selon que l'éclairage est supposé cohérent ou incohérent [1]. Nous nous proposons d'étudier ici ce qui se passe dans les cas intermédiaires, où l'éclairage est partiellement cohérent.

La théorie de la cohérence partielle, qui a été étudiée par divers auteurs, notamment ZERNIKE [2], HOPKINS [3] [4], BLANC-LAPIERRE et DUMONTET [5], WOLF [6], montre que le facteur de cohérence de la lumière dépend des dimensions angulaires apparentes de la source lumineuse, ou de la pupille de sortie du système d'éclairage si l'on emploie un condenseur. Si le système d'éclairage a une pupille circulaire, on peut donc prendre comme paramètre déterminant l'état de cohérence partielle de la lumière l'ouverture numérique du système (évaluée du côté de l'objet éclairé). Comme d'autre part, pour un mode d'éclairage donné, le facteur de cohérence entre deux points éclairés dépend des positions relatives de ces points, pour apprécier dans quelle mesure l'éclairage fourni par un certain dispositif est pratiquement cohérent ou incohérent il convient de préciser les caractéristiques de l'objet éclairé et de l'instrument employé pour son observation.

Nous considérerons ici le problème suivant : Soit un instrument d'ouverture numérique a qui forme une image d'un objet constitué par un point noir (c'est-à-dire une petite tache noire de dimensions nettement inférieures au pouvoir séparateur de l'instrument) sur fond blanc (c'est-à-dire uniformément transparent). L'objet étant éclairé à l'aide d'un certain système d'ouverture $b = pa$ (les ouvertures a et b sont évaluées toutes deux du côté de l'objet éclairé, et correspondent donc respectivement à la pupille d'entrée de l'instrument d'observation et à la pupille de sortie du

système d'éclairage) nous cherchons comment varie le contraste de l'image obtenue en fonction du rapport $p = b/a$.

Nous nous limiterons ici au cas de systèmes centrés à pupilles circulaires, et nous considérerons plus particulièrement le cas où l'instrument d'observation est un instrument parfait et celui où il présente un léger défaut de mise au point. On sait d'autre part que les aberrations du condenseur n'ont aucune influence [2] [3].

Les calculs seront faits en utilisant l'approximation de la théorie des ondes scalaires.

Expression de la répartition d'intensité dans l'image d'un objet noir sur fond blanc.

— Considérons un objet plan (\odot) de transparence complexe $E(\mathbf{M})$ dont on forme une image (\mathcal{J}) à l'aide d'un instrument optique (fig. 1), que nous supposons être un système centré dont l'axe optique est perpendiculaire au plan de l'objet. Soit $F(\mathbf{M}')$ la fonction donnant la répartition des amplitudes complexes dans la tache de diffraction produite dans le plan image par un point lumineux placé au centre du plan objet. Nous admettrons que pour un choix convenable des coordonnées dans les plans objet et image l'amplitude produite en \mathbf{M}' par un point lumineux placé en \mathbf{M} est de la forme $F(\mathbf{M}' - \mathbf{M})$, c'est-à-dire que les aberrations varient peu en fonction de la position du point objet dans le champ. Nous prendrons ici dans le plan objet une unité de longueur égale à la longueur d'onde de la lumière employée, supposée monochromatique ; dans le plan image, cette unité sera multipliée par le grandissement de l'instrument. On peut définir aussi l'instrument par le facteur de transmission $f(\mathbf{X})$ de sa pupille Ω . La variable \mathbf{X} est une grandeur vectorielle à 2 dimensions qui définit la direction d'un rayon

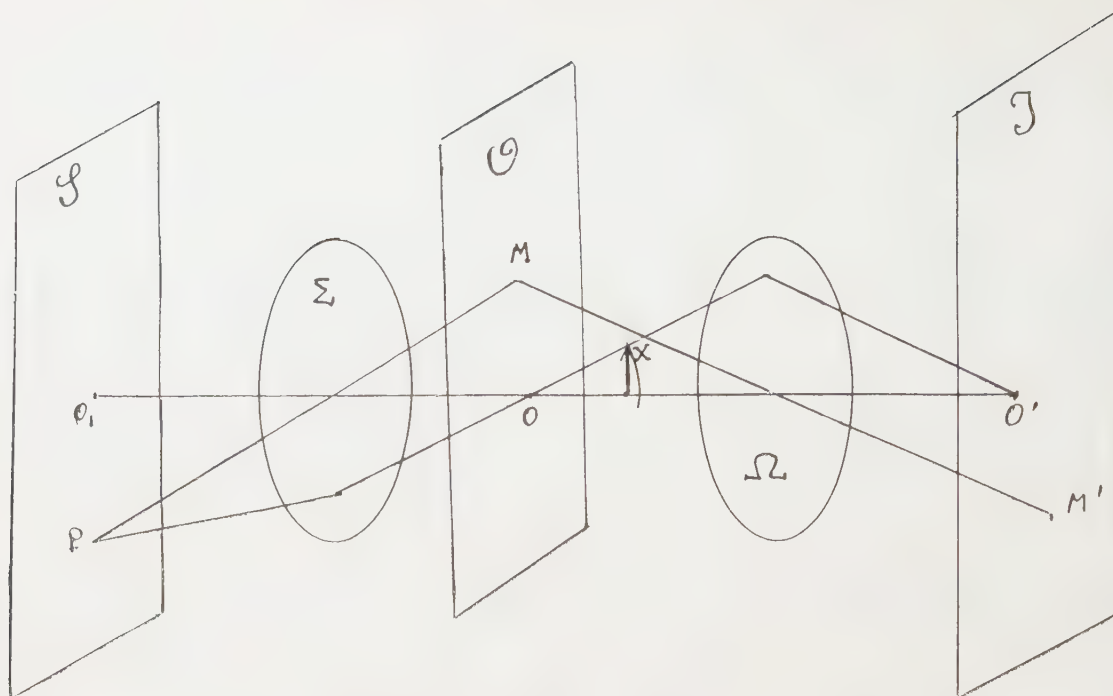


FIG. 1.

allant du centre du plan objet au point considéré de la pupille d'entrée du système; on peut l'interpréter comme la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe optique du système d'un vecteur unitaire porté par le rayon (pour un rayon faisant un angle u avec l'axe, on a $|\mathbf{X}| = \sin u$). Pour les valeurs de \mathbf{X} intérieures au domaine Ω défini par l'ouverture de la pupille, $f(\mathbf{X}) = e^{i\Psi(\mathbf{X})}$, où $\Psi(\mathbf{X})$ représente le déphasage entre l'onde sortant de l'instrument et celle que donnerait un instrument parfait (nous supposons qu'on a établi une correspondance entre les pupilles d'entrée et de sortie de telle sorte que deux points situés sur un même rayon passant par le centre de l'objet aient des coordonnées égales). Pour les valeurs de \mathbf{X} extérieures à Ω , c'est-à-dire correspondant à des rayons passant en dehors de la pupille, nous aurons $f(\mathbf{X}) = 0$. On sait que $F(\mathbf{M}')$ se déduit de $f(\mathbf{X})$ par une transformation de FOURIER

$$(1) \quad F(\mathbf{M}') = \int f(\mathbf{X}) e^{2\pi i \mathbf{X} \mathbf{M}'} d\mathbf{X}.$$

Considérons d'autre part une source plane uniforme qui éclaire à travers un certain système optique défini par le facteur de transmission $a(\mathbf{X})$ de sa pupille Σ . Ici, \mathbf{X} représente la direction d'un rayon allant du centre de l'objet éclairé à un point de la pupille de sortie du système d'éclairage, cette direction étant définie de la manière indiquée plus haut. Nous supposons que l'axe optique du système d'éclairage est le même que celui de l'instrument d'observation et perpendiculaire au plan de la source.

Soit $A(\mathbf{M})$ la transformée de FOURIER de $a(\mathbf{X})$.

Avec un choix convenable de coordonnées dans le plan de la source, l'amplitude produite au point \mathbf{M} de l'objet par un point \mathbf{P} de la source sera proportionnelle à $A(\mathbf{M} - \mathbf{P})$. En éclairant l'objet avec une source ponctuelle placée en \mathbf{P} , nous aurons au point \mathbf{M}' de l'image une amplitude proportionnelle à

$$(2) \quad U(\mathbf{M}', \mathbf{P}) = \int A(\mathbf{M} - \mathbf{P}) E(\mathbf{M}) F(\mathbf{M}' - \mathbf{M}) d\mathbf{M}.$$

Les différents éléments de la source étant supposés incohérents, l'intensité produite par une source étendue s'obtient en intégrant l'intensité (carré du module de l'amplitude) produite par un point; si l'intensité de la source par unité de surface est prise égale à l'unité, l'objet éclairé par l'ensemble de la source donnera dans le plan image une répartition d'intensité de la forme

$$(3) \quad I(\mathbf{M}') = \int |U(\mathbf{M}', \mathbf{P})|^2 d\mathbf{P}.$$

Nous supposons la source suffisamment étendue pour que l'éclairement résultant (dans la région qui nous intéresse) ne soit limité que par l'ouverture du système d'éclairage, de sorte que l'expression (3) a sensiblement la même valeur que si le domaine d'intégration par rapport à \mathbf{P} était illimité. Dans ces conditions, il résulte des propriétés de la transformation de FOURIER qu'en posant

$$(4) \quad u(\mathbf{M}', \mathbf{X}) = \int U(\mathbf{M}', \mathbf{P}) e^{2\pi i \mathbf{X} \mathbf{P}} d\mathbf{P},$$

l'expression (3) est équivalente à

$$(5) \quad I(\mathbf{M}') = \int |u(\mathbf{M}', \mathbf{X})|^2 d\mathbf{X}.$$

En combinant les formules (2) et (4) nous obtenons, en posant $\mathbf{P} = \mathbf{M} + \mathbf{Q}$,

$$(6) \quad u(\mathbf{M}', \mathbf{X}) = \int A(-\mathbf{Q}) e^{2\pi i \mathbf{X} \mathbf{Q}} d\mathbf{Q} \int E(\mathbf{M}) F(\mathbf{M}' - \mathbf{M}) e^{2\pi i \mathbf{X} \mathbf{M}} d\mathbf{M}.$$

La première intégrale représente l'expression complexe conjuguée de $a(\mathbf{X})$, comme on peut le voir en appliquant les formules d'inversion des intégrales de FOURIER. En désignant l'autre intégrale par $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{M}')$, nous voyons que $I(\mathbf{M}')$ peut se mettre sous la forme

$$(7) \quad I(\mathbf{M}') = \int |a(\mathbf{X})|^2 |\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{M}')|^2 d\mathbf{X},$$

avec

$$(8) \quad \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{M}') = \int E(\mathbf{M}) F(\mathbf{M}' - \mathbf{M}) e^{2\pi i \mathbf{X} \mathbf{M}} d\mathbf{M}.$$

Une expression équivalente a été trouvée par HOPKINS [4] en partant d'une certaine définition du facteur de cohérence qui fait intervenir la transformée de FOURIER de $|a(\mathbf{X})|^2$.

Notons que $a(\mathbf{X})$ n'intervenant que par le carré de son module, la répartition des intensités dans l'image ne dépend pas des aberrations du condenseur (représentables par une variation de phase sur la pupille de sortie); ce fait avait déjà été signalé par ZERNIKE [2].

En tenant compte que la fonction $a(\mathbf{X})$ est nulle à l'extérieur du domaine Σ limité par l'ouverture du condenseur et qu'elle est de module unité à l'intérieur, la formule (7) peut encore s'écrire, en limitant le domaine d'intégration,

$$(9) \quad I(\mathbf{M}') = \int_{\Sigma} |\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{M}')|^2 d\mathbf{X}.$$

Appliquons les formules précédentes au cas où l'objet est constitué par une petite tache noire (opaque) sur un fond complètement transparent. La fonction $E(\mathbf{M})$ est nulle à l'intérieur d'un certain domaine S et égale à l'unité à l'extérieur de S (fig. 2). Désignons par $E'(\mathbf{M})$ la fonction qui représente l'objet complémentaire (trou dans un écran opaque)

$$(10) \quad E'(\mathbf{M}) = 1 - E(\mathbf{M}) = \begin{cases} 1 & \text{sur } S \\ 0 & \text{en dehors de } S \end{cases}$$

Soit $\varphi'(\mathbf{X}, \mathbf{M}')$ l'expression obtenue en remplaçant E par E' dans la définition (8) de $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{M}')$

$$(11) \quad \varphi'(\mathbf{X}, \mathbf{M}') = \int_S F(\mathbf{M}' - \mathbf{M}) e^{2\pi i \mathbf{X} \mathbf{M}} d\mathbf{M}.$$

Nous avons

$$(12) \quad \varphi(\mathbf{X}, \mathbf{M}') = f(\mathbf{X}) e^{2\pi i \mathbf{X} \mathbf{M}'} - \varphi'(\mathbf{X}, \mathbf{M}').$$

Désignons par $g(\mathbf{X})$ la fonction $f(\mathbf{X}) |a(\mathbf{X})|^2$. Nous avons

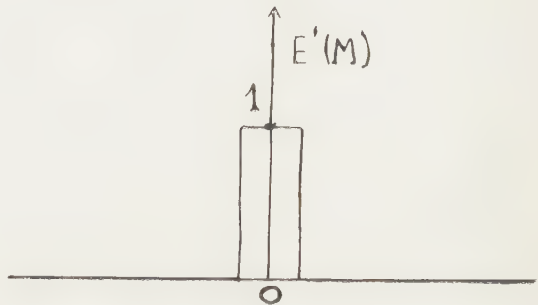
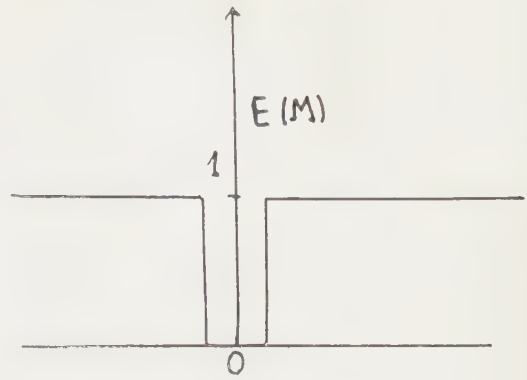


FIG. 2.

$$(13) \quad \begin{cases} f(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X}) & \text{sur } \Sigma \\ g(\mathbf{X}) = 0 & \text{en dehors de } \Sigma \end{cases}$$

Soit $G(\mathbf{M})$ la transformée de FOURIER de $g(\mathbf{X})$.

En tenant compte des relations (11), (12) et (13), on peut mettre $I(\mathbf{M}')$ sous la forme

$$(14) \quad I(\mathbf{M}') = J - 2 I_1(\mathbf{M}') + I_2(\mathbf{M}')$$

avec

$$(15) \quad J = \int_{\Sigma} |f(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X} = \int_{\Omega} |g(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X}$$

$$(16) \quad I_1(\mathbf{M}') = \frac{1}{2} \int_S [F(\mathbf{M}' - \mathbf{M}) G^*(\mathbf{M}' - \mathbf{M}) + G(\mathbf{M}' - \mathbf{M}) F^*(\mathbf{M}' - \mathbf{M})] d\mathbf{M}$$

$$(17) \quad I_2(\mathbf{M}') = \int_{\Sigma} |\varphi'(\mathbf{X}, \mathbf{M}')|^2 d\mathbf{X}.$$

On peut noter que J représente l'intensité obtenue en supprimant la tache noire, et I_2 l'intensité obtenue en remplaçant la tache noire sur fond blanc par une tache blanche sur fond noir.

Les formules précédentes sont valables pour une tache noire de dimensions quelconques, et pour un instrument dont les aberrations peuvent être quelconques (pourvu qu'elles soient représentables par le facteur de transmission $f(\mathbf{X})$ indépendant de la position du point \mathbf{M} dans la région utile du champ de l'instrument).

Cas où l'objet noir est très petit. — Lorsque la tache noire est suffisamment petite, par rapport au pouvoir

séparateur de l'instrument d'observation, pour être assimilable à un point, on peut admettre en première approximation que les fonctions $F(\mathbf{M}' - \mathbf{M})$ et $G(\mathbf{M}' - \mathbf{M})$ ne varient pas lorsque, \mathbf{M}' étant fixé, \mathbf{M} se déplace sur S . En supposant le « point noir » placé au centre du plan objet, nous obtenons

$$(18) \quad I_1 = \frac{1}{2} S [F(\mathbf{M}') G^*(\mathbf{M}') + G(\mathbf{M}') F^*(\mathbf{M}')]]$$

$$(19) \quad \varphi'(\mathbf{M}', \mathbf{X}) = e'(\mathbf{X}) F(\mathbf{M}') = F(\mathbf{M}') \int_S e^{2\pi i \mathbf{M} \cdot \mathbf{X}} d\mathbf{M},$$

S désignant l'aire de la tache noire (en prenant λ^2 pour unité de surface) et $e'(\mathbf{X})$ étant la transformée de FOURIER de $E'(\mathbf{M})$.

Nous supposons que l'instrument d'observation (objectif) et le dispositif d'éclairage (condenseur) ont des pupilles circulaires, dont les ouvertures numériques seront désignées respectivement par a et b . Le domaine Ω sera donc défini par $\mathbf{X}^2 \leq a^2$ et Σ par $\mathbf{X}^2 \leq b^2$. La fonction $f(\mathbf{X})$ sera nulle pour $\mathbf{X}^2 > a^2$, et pour $\mathbf{X}^2 \leq a^2$ elle aura pour module l'unité et pour argument une certaine fonction liée aux aberrations de l'objectif; la fonction $g(\mathbf{X})$ sera égale à $f(\mathbf{X})$ si l'on a à la fois $\mathbf{X}^2 \leq a^2$ et $\mathbf{X}^2 \leq b^2$, et s'annulera partout ailleurs. Il en résulte que les fonctions $F(\mathbf{M}')$ et $G(\mathbf{M}')$ seront identiques si $a \leq b$, mais généralement distinctes si $a > b$.

Examinons successivement les cas $a > b$ et $b > a$. Si $a > b$ (le condenseur est moins ouvert que l'objectif) nous obtenons immédiatement, d'après l'expression (15) de J :

$$(20) \quad J = \pi b^2.$$

D'autre part, la tache noire ayant des dimensions petites par rapport au pouvoir séparateur de l'objectif qui est de l'ordre de $1/a$, il en résulte que la fonction $e'(\mathbf{X})$, qui est la transformée de FOURIER de $E'(\mathbf{M})$, varie peu sur Ω , donc aussi sur Σ . Dans les formules (17) et (19) nous pouvons en première approximation confondre $e'(\mathbf{X})$ avec $e'(0) = S$, d'où nous obtenons:

$$(21) \quad I_2 = S^2 F(\mathbf{M}')^2.$$

Si $b > a$ (le condenseur est plus ouvert que l'objectif) nous obtenons au lieu de (20) l'expression.

$$(22) \quad J = \pi a^2.$$

D'autre part, lorsque le rapport $p = b/a$ devient nettement supérieur à l'unité, la formule (21) cesse d'être une bonne approximation, car $e'(\mathbf{X})$ peut arriver à varier sensiblement dans le domaine Σ qui est plus étendu que Ω . Il faut alors remplacer l'expression (21) par l'expression plus générale

$$(23) \quad I_2(\mathbf{M}') = |F(\mathbf{M}')|^2 \int_{\Sigma} |e'(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X}.$$

Si le condenseur est beaucoup plus ouvert que l'objectif, $b \gg a$, de telle sorte que la tache noire qui est petite par rapport au pouvoir séparateur de l'instrument d'observation est cependant grande par rapport

au pouvoir séparateur d'un instrument dont l'ouverture numérique serait égale à celle du système d'éclairage, on obtient à la limite

$$(24) \quad I_2(\mathbf{M}') = S |F(\mathbf{M}')|^2.$$

Cette expression s'obtient en remarquant que si le domaine d'intégration est infini (ce qu'on peut admettre si le domaine Σ est assez grand pour que l'intégrale de $|e'(\mathbf{X})|^2$ prise à l'extérieur de Σ soit négligeable) on peut remplacer l'intégrale de $|e'(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X}$ par celle de $|E'(\mathbf{M})|^2 d\mathbf{M}$, dont la valeur est évidemment S .

Expression du contraste de l'image. — Nous définirons le contraste de l'image du point noir par la baisse relative d'intensité que la présence de ce point noir au centre du plan objet produit au centre du plan image. Une telle définition a un sens à condition que les aberrations ne soient pas trop importantes pour que $I(\mathbf{M}')$ ait un minimum assez net au centre. L'expression du contraste sera donc

$$(25) \quad \gamma = (1/J) [2 I_1(0) - I_2(0)] ,$$

les grandeurs J , I_1 , I_2 ayant les valeurs indiquées plus haut. Nous distinguerons deux cas selon les valeurs relatives de a et b .

1° *Le condenseur est moins ouvert que l'objectif* ($b < a$). En utilisant les formules (18), (20) et (21) nous trouvons

$$(26) \quad \gamma = \frac{S}{\pi b^2} [F(0) G^*(0) + G(0) F^*(0)] - S^2 |F(0)|^2.$$

Quand l'ouverture b devient très petite, $G(0)$ se confond avec πb^2 et le contraste tend vers

$$(27) \quad \gamma_c = 1 - |1 - SF(0)|^2 ,$$

expression équivalente à celle qu'on obtiendrait dans le cas de l'éclairage parfaitement cohérent.

2° *Le condenseur est plus ouvert que l'objectif* ($b > a$). Les fonctions F et G devenant identiques, $I_1(\mathbf{M}')$ se réduit à $|F(\mathbf{M}')|^2 S$. En utilisant les expressions (22) et (23), nous obtenons, comme expression du contraste,

$$(28) \quad \gamma = \frac{|F(0)|^2}{\pi a^2} \left[2S - \int_{\Sigma} |e'(\mathbf{X})|^2 d\mathbf{X} \right].$$

On peut facilement en déduire que, pour une ouverture donnée de l'objectif, le contraste devient une fonction décroissante de l'ouverture du condenseur dès que cette ouverture dépasse celle de l'objectif.

Si le rapport $p = b/a$ n'est que légèrement supérieur à l'unité, on peut considérer que l'expression (21) de I_2 est encore approximativement valable et écrire

$$(29) \quad \gamma = \frac{2S}{\pi a^2} |F(0)|^2 - p^2 S^2 |F(0)|^2 ;$$

mais cette approximation n'est acceptable que dans un domaine assez limité.

Si le rapport $p = b/a$ devient très grand, on peut prendre pour I_2 l'expression (24), et le contraste tend vers

$$(30) \quad \gamma_i = \frac{2S}{\pi a^2} |F(0)|^2,$$

expression équivalente à celle qu'on obtiendrait en supposant l'éclairage complètement incohérent.

Lorsque les ouvertures de l'instrument et du système d'éclairage sont égales ($a = b$, $p = 1$), l'expression du contraste devient :

$$(31) \quad \gamma = \left[\frac{2S}{\pi a^2} - S^2 \right] |F(0)|^2.$$

Comme le « point noir » est supposé avoir des dimensions petites par rapport à $1/a$, nous avons $\pi a^2 S \ll 1$. Donc la valeur de γ donnée par (31) est à peu près le double de la valeur γ_i donnée par (30).

Nous voyons donc que lorsque les ouvertures de l'objectif et du condenseur sont égales, le contraste de l'image d'un point noir est environ le double du contraste qu'on obtiendrait en éclairage incohérent. Il n'est donc pas exact d'admettre, comme on le fait parfois, que l'on obtient un éclairage pratiquement incohérent pour $p = 1$.

Nous donnons ci-dessous (tableau I) les valeurs numériques du rapport entre le contraste γ calculé pour diverses valeurs de $p = b/a$ d'après la formule (28) et le contraste γ_i obtenu en éclairage incohérent d'après la formule (30), en prenant comme objet noir un petit cercle de rayon ε tel que $\varepsilon a = 0,08$; on a $\pi a^2 S = 0,06$. L'expression générale de γ lorsque l'objet est un cercle de rayon $\varepsilon \ll 1/a$ est (pour $b \geq a$)

$$(32) \quad \gamma = \frac{S}{\pi a^2} |F(0)|^2 [1 + J_0^2(2\pi\varepsilon b) + J_1^2(2\pi\varepsilon b)].$$

TABLEAU I

p	1	2	3	4	5	10	20	∞
γ/γ_i	1,94	1,78	1,57	1,38	1,25	1,14	1,06	1,00

Les résultats sont représentés graphiquement (fig. 3); la courbe obtenue en utilisant la formule approximative (29) est représentée en pointillé : nous voyons qu'elle donne une approximation assez bonne jusqu'à $p = 2$ ou 3.

Les résultats obtenus jusqu'ici ne supposent pas d'hypothèse particulière sur les aberrations de l'instrument, à part que ces aberrations ne doivent pas être trop fortes, de manière que l'on obtienne encore un contraste appréciable avec un objet dont les dimensions sont assez petites non seulement par rapport au pouvoir séparateur de l'instrument considéré mais aussi par rapport à celui d'un instrument parfait de même ouverture. Nous allons examiner d'une manière plus détaillée les cas particuliers de l'instrument parfait et de l'instrument présentant un défaut de mise au point.

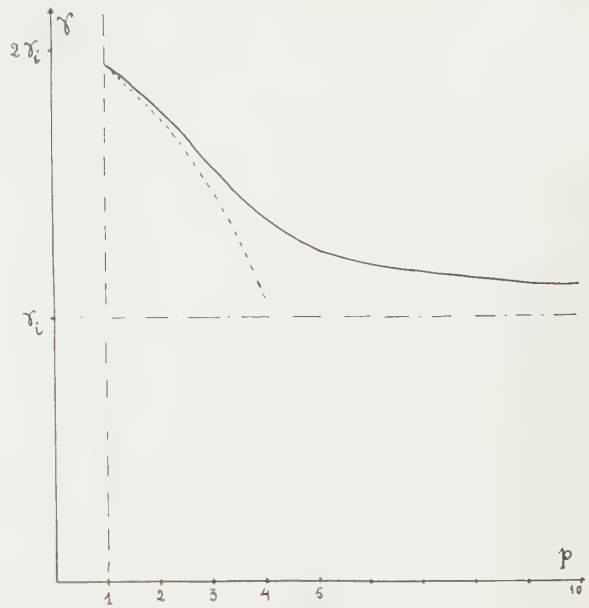


FIG. 3.

Cas de l'instrument parfait. — Pour un instrument dépourvu d'aberrations et parfaitement mis au point le facteur de transmission $f(\mathbf{X})$ est égale à l'unité sur toute la pupille

$$(33) \quad f(\mathbf{X}) = 1 \quad \text{pour} \quad \mathbf{X}^2 \leq a^2.$$

On en déduit

$$(34) \quad F(0) = \pi a^2,$$

$$(35) \quad G(0) = \pi b^2 = p^2 \pi a^2.$$

Pour $p \leq 1$ ($b \leq a$), nous obtenons

$$(36) \quad \gamma = 2 S \pi a^2 - S^2 \pi^2 a^4.$$

Le contraste est donc indépendant de l'ouverture du condenseur tant qu'elle ne dépasse pas celle de l'objectif. Il en résulte que pour un instrument parfait le contraste obtenu pour $p = 1$ est le même qu'en éclairage cohérent. Comme l'objet est supposé très petit, $\pi a^2 S \leq 1$ et on peut négliger en première approximation le terme en S^2 , d'où

$$(37) \quad \gamma = 2 S \pi a^2.$$

Pour $p > 1$, le contraste diminue. Nous avons déjà indiqué plus haut l'allure générale de la décroissance du contraste pour les grandes ouvertures du condenseur. Pour les très grandes valeurs de p nous obtenons à la limite la valeur du contraste en éclairage incohérent.

$$(38) \quad \gamma_i = S \pi a^2.$$

Les formules (37) et (38) correspondent aux expressions obtenues précédemment par A. MARÉCHAL [1], concernant respectivement l'éclairage cohérent et l'éclairage incohérent. D'après ce que nous avons vu plus haut, le fait que le contraste en éclairage cohérent est double du contraste en éclairage incohérent

dans le cas d'un instrument parfaitement stigmatique résulte du fait que, dans ce cas particulier, le contraste pour $p = 1$ est le même qu'en éclairage cohérent.

Cas d'un petit défaut de mise au point. — Un petit défaut de mise au point produit entre les zones centrales et marginales de l'onde un déphasage proportionnel au carré de l'ouverture, donc le facteur de transmission $j(\mathbf{X})$ est de la forme

$$(39) \quad j(\mathbf{X}) = e^{i\alpha \mathbf{X}^2} \quad \text{pour } \mathbf{X}^2 \leq u^2.$$

Le coefficient α étant proportionnel à la distance entre le plan de mise au point utilisé et celui correspondant à la mise au point exacte. En posant

$$(40) \quad \alpha a^2 = \varphi,$$

nous obtenons, pour $p = b/a \leq 1$,

$$(41) \quad F(0) = \frac{\pi a^2}{\varphi} [e^{i\varphi} - 1]$$

$$(42) \quad G(0) = p^2 \frac{\pi a^2}{i\varphi} [e^{ip^2\varphi} - 1].$$

Pour $p > 1$, on a les mêmes expressions que pour $p = 1$. Nous en déduisons l'expression du contraste, pour $p \leq 1$,

$$(43) \quad \gamma = 2S \frac{\pi a^2}{p^2 \varphi^2} [1 - \cos \varphi - \cos(p^2 \varphi) + \cos(p^2 - 1)\varphi].$$

Le contraste en éclairage cohérent ($p \rightarrow 0$) est

$$(44) \quad \gamma_c = 2S \pi a^2 \frac{\sin \varphi}{\varphi}.$$

En éclairage incohérent, on obtient

$$(45) \quad \gamma_i = 2S \pi a^2 \left(\frac{1 - \cos \varphi}{\varphi^2} \right).$$

En considérant la dérivée par rapport à p de l'expression (43) de γ , nous trouvons que pour les valeurs de φ qui sont inférieures à π la valeur de p correspondant au maximum de contraste reste assez voisine de $p = 0,87$. Nous donnons ci-après (tableau II) les valeurs, calculées pour diverses valeurs de p , du rapport entre le contraste γ obtenu avec un défaut de mise au point $\varphi = \pi/2$ (correspondant à la tolérance de RAYLEIGH) et le contraste γ_0 obtenu en éclairage cohérent avec l'instrument parfaitement mis au point. Les valeurs indiquées pour les valeurs de p supérieures à l'unité ont été obtenues en prenant comme objet un petit cercle de rayon $0,08$ ($1/a$), qui donne $\gamma_0 = 0,12$.

TABLEAU II

p	0	0,20	0,50	0,87	1	5	10	∞
γ/γ_0	0,64	0,66	0,74	0,84	0,81	0,51	0,46	0,41

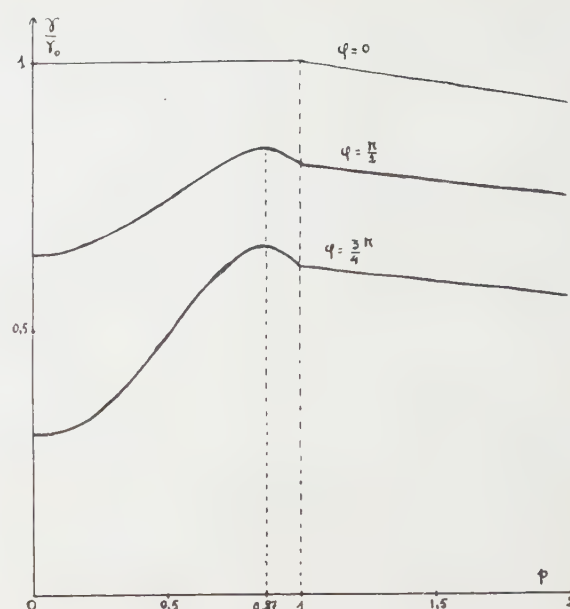


FIG. 4.

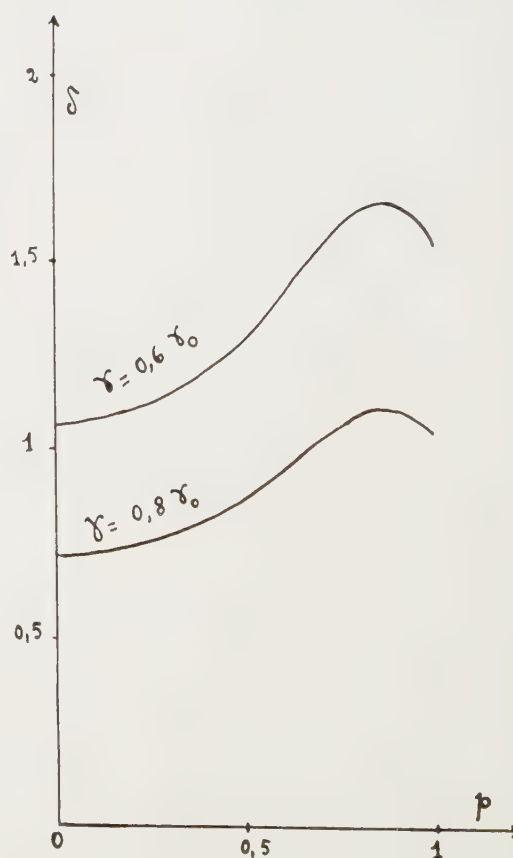


FIG. 5.

Nous donnons également (tableau III) les résultats d'un calcul analogue pour $\varphi = 3\pi/4$ (défaut de mise au point correspondant à une fois et demie la tolérance de RAYLEIGH).

TABLEAU III

p	0	0,20	0,50	0,87	1	5	10	∞
$ \gamma/\gamma_0 $	0,30	0,33	0,49	0,65	0,61	0,39	0,35	0,30

Les résultats sont représentés graphiquement (fig. 4). Nous donnons d'autre part (fig. 5) les courbes représentant en fonction de p le défaut de mise au point tolérable δ pour une baisse de contraste de 20 % ou de 40 %. L'unité employée est telle que $\delta = 1$ correspond à $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion. — L'étude de l'influence des conditions d'éclairage sur le contraste de l'image d'un point noir montre que l'éclairage cohérent et l'éclairage incohérent peuvent effectivement s'interpréter comme deux cas limites de l'éclairage partiellement cohérent, limites correspondant respectivement à des valeurs infiniment petites ou infiniment grandes du rapport des ouvertures numériques du système d'éclairage et de l'instrument d'observation. Pour une ouverture donnée de l'instrument il est en principe toujours possible de réaliser un système d'éclairage d'ouverture assez petite pour que l'éclairage soit pratiquement cohérent. Par contre, un système d'éclairage ayant une ouverture assez grande pour que l'éclairage puisse être considéré comme incohérent n'est effectivement réalisable que si l'instrument d'observation est lui-même assez peu ouvert. Il en résulte que, par exemple,

l'éclairage sera assez loin d'être incohérent pour les ouvertures généralement utilisées en microscopie ; nous avons vu qu'une ouverture du condenseur égale à celle de l'objectif est encore nettement insuffisante pour que l'éclairage puisse être considéré comme incohérent. Par contre, il arrive souvent que l'éclairage soit pratiquement incohérent dans le cas de l'observation des objets éloignés : par exemple, pour une lunette astronomique qui vise une planète passant devant le Soleil, l'ouverture numérique de l'instrument, évaluée du côté objet, est de l'ordre de 10^{-10} , celle du système d'éclairage constitué par le Soleil est de l'ordre de 10^{-2} , d'où un rapport de l'ordre de 10^8 , pratiquement infini.

D'autre part, l'étude de la variation du contraste en présence d'un défaut de mise au point montre que, dans le cas où l'ouverture du condenseur ne dépasse pas celle de l'objectif (cas de la microscopie par exemple), si l'ouverture du système d'éclairage n'influe guère sur la valeur du contraste qu'on peut obtenir avec un instrument parfaitement au point, elle influe considérablement sur la baisse de contraste produite par un défaut de mise au point. Un choix convenable des conditions d'éclairage peut donc influencer d'une manière notable la tolérance sur la précision de mise au point de l'instrument.

RÉFÉRENCES

- [1] A. MARÉCHAL, *Rev. Opt.*, **32**, 1953, p. 649.
- [2] F. ZERNIKE, *Physica*, **5**, 1938, p. 785.
- [3] H. H. HOPKINS, *Proc. Roy. Soc. A.*, **208**, 1951, p. 263.
- [4] H. H. HOPKINS, *Proc. Roy. Soc. A.*, **217**, 1953, p. 408.
- [5] A. BLANC-LAPIERRE et P. DUMONTET, *Rev. Opt.*, **34**, 1955, p. 1.
- [6] E. WOLF, *Proc. Roy. Soc. A.*, **225**, 1954, p. 96.

Manuscrit reçu le 23 mai 1955.

On a set of classical methods for the computation of optical systems

F. J. HAVLIČEK

J. STEFAN Institute, Ljubljana-Yugoslavia

SUMMARY. — Starting from Gaussian optics, PETZVAL sum and a first criterion for low distortion for the first layout, there are foreseen three steps in the calculation of the system. In the first there is combined a SEIDEL approximation for thin lenses introducing ARGENTIERI's coefficients, with an analysis for a thick system following BEREK's method. Iteration of this two methods with slide rule accuracy give the starting point for the next higher stage of correction of the system of thick lenses. In the next step a variation method of SEIDEL coefficients leads with parallel trigonometrical checks to the final stage of correction. In the last step is introduced a control of the results obtained with the former methods by using an analysis of the wavefront.

SOMMAIRE. — En partant de l'optique de GAUSS pour établir en premier lieu la somme de PETZVAL et une condition de faible distortion, trois stades sont prévus dans le calcul d'un système.

Dans le premier on combine une approximation de SEIDEL pour lentilles minces introduisant les coefficients d'ARGENTIERI, avec l'analyse d'un système mince selon la méthode de BEREK. La répétition de ces deux méthodes (avec la précision de la règle à calcul), donne le point de départ pour le 2^e stade de correction du système de lentilles épaisses. Dans ce 2^e stade, une méthode de variation des coefficients de SEIDEL combinée avec des calculs de contrôle trigonométriques conduisent au dernier stade de la correction. Dans la dernière phase du calcul on introduit un contrôle des résultats obtenus par les méthodes précédentes en analysant la forme de la surface d'onde.

ZUSAMMENFASSUNG. — Nachdem man im Rahmen der Gaußschen Optik einen ersten Ansatz mit dem gewünschten Wert der Petzvalsumme und für eine geringe Verzeichnung gemacht hat, wird empfohlen, die weitere Berechnung eines optischen Systems in drei Schritten vorzunehmen. Zunächst kombiniert man im Seidelschen Gebiet die von ARGENTIERI eingeführten Koeffizienten für dünne Linsen mit der analytischen Methode nach BEREK für dicke Linsen. Die wiederholte Anwendung dieser beiden Methoden mit Rechenschiebergengenauigkeit bildet dann den Ausgangspunkt für die nächste Stufe in der Korrektur des Systems aus dicken Linsen. Bei diesem Schritt läuft der Variation der Seidelschen Koeffizienten die trigonometrische Kontrolle parallel. Schliesslich werden die Ergebnisse an Hand einer Analyse der Wellenfläche geprüft.

Methods of designing optical systems, which are believed to be of general use, have been developed at the J. STEFAN Institute.

Starting from Gaussian optics and the PETZVAL condition for a first layout, three steps are used in calculating an optical system. First the SEIDEL approximation for thin lenses (using ARGENTIERI's coefficients [1]) is combined with a thick lens analysis using BEREK's method [2]. Iteration of these methods to slide rule accuracy gives the starting point for the next stage. Here a variational method of SEIDEL coefficients with parallel trigonometrical calculations leads to the final stage of correction. Lastly the results obtained by the former methods are checked by analysis of the wavefront.

A first layout should give a low value for the contribution of the separate surfaces, a suitable PETZVAL-sum and should avoid excessive distortion of the oblique rays. Especially in the case of an objective of high relative aperture, aberrations calculated by Seidel theory will not be true aberrations, but the trend of their variations will, within not too wide a range, run approximately parallel with the true variations, so that a few trigonometrical calculations will give an approximately linear relationship between the differences of the true aberrations and those determined by SEIDEL theory [3].

The following example of a triplet whose first lens is divided to lower the aberrations of the first surfaces will illustrate the method. To keep spherical aberration low, the second lens is an AMICI-meniscus and to ensure chromatic correction the first and last components are made of two glasses having the same refracting index for yellow light, but different ABBE-num-

bers. A high refractive index for the positive components and a low one for the negative gives a low PETZVAL-sum and reduces the spherical aberration of the first surfaces.

The ratio of the distances of the positive thin lenses from the negative thin lens is taken as 2 : 1, the first distance, for unit focal length, being $d_1 = 0.5$. If the contraction of the incident rays, ω , for the negative lens, be 0.5, the power of the first thin lens, φ_1 , be unity, and taking $\varphi_1/\varphi_3 = \frac{d_2}{d_1}$ to give low distortion for a diaphragm near the negative lens, it follows that $\varphi_3 = 2$, $\varphi_2 = -2$. The PETZVAL-sum is then 0.355. The AMICI-meniscus will have $\varphi_b = 0.494$ and the first part of the positive system will have $\varphi_a = 0.575$, if the separation between these thin lenses is 0.242.

Using the convenient coefficients of ARGENTIERI, we get for the SEIDEL-sums ΣA , ΣB , $\Sigma \Gamma$ as used by BEREK and for $S_{1,\infty}$ the following formulae (by slide rule):

$$\begin{aligned}\Sigma A &= 0.3055 \mu_1^2 - 0.165 \mu_1 - \\ &\quad - 0.0739 \mu_2^2 + 0.125 \mu_2 + \\ &\quad + 0.0671 \mu_3^2 - 0.125 \mu_3 - 0.289 \\ \Sigma B &= 0.452 \mu_1 - \\ &\quad - 0.0827 \mu_2^2 - 0.281 \mu_2 + \\ &\quad + 0.1422 \mu_3^2 + 0.129 \mu_3 - 0.0915 \\ \Sigma \Gamma &= 0.0924 \mu_2^2 - 0.7867 \mu_2 + \\ &\quad + 0.3015 \mu_3^2 + 1.1035 \mu_3 + 1.609\end{aligned}$$

$$\text{where } \mu = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \frac{1}{S} - \frac{1}{S'}$$

Four trials lead to ΣA 0.64, ΣB 0.32, $\Sigma \Gamma$ 0.17, from the above formulae, which give for the SEIDEL-sums in a real system of lenses with suitable thicknesses, ΣI 0.45, z_1 ($\Sigma II = 0$) 0.92, ΣIII -0.074, ΣIV 0.223. (The SEIDEL calculations for the thick lenses require rather higher accuracy than is given by the ordinary slide rule).

From this stage corrections are made by variations of the system of thick lenses as mentioned above. Six trials lead to a system of the following characteristics.

Triplet H9m $F : 1.5 ; f = 1$

r	e'	n'	v
0.6671	0.2	1.7426	+ 5.0 & 27.7
1.2211	0.003	1	
0.5480	0.15	1.7423	+ 5.0
0.7102	0.1945	1	
-1.0702	0.03	1.4645	65.7
0.3001	0.06	1	
0.4968	0.25	1.7426	45.0 & 27.7
-1.0553	0.3870	1	

Table of SEIDEL coefficients of the surfaces

A	B	Γ	E	P
0.82381	0.54955	0.36659	0.67069	0.63882
0.00326	0.02885	0.25541	-0.82815	-0.34897
-0.00213	-0.00272	-0.00348	0.98924	0.77764
0	0.00055	0.59915	-0.97104	-0.60004
-0.75679	0.36813	-0.17908	0.23128	-0.29638
-0.52440	-1.07038	-2.18477	-6.61643	-1.05679
0.13029	0.39668	1.20770	6.28858	0.85782
0.59658	0.00338	0.00002	0.00220	0.38907
Sums 0.27061	0.27404	0.06155	-0.23363	0.36117

$$\Sigma I = 0.271 ; z_1 (\Sigma II = 0) = 1.0126 ;$$

$$\Sigma III = -0.287 ; \Sigma IV = 0.145 ; \Sigma V = 0.228$$

z_1 is chosen greater than before to get a better correction of distortion. The coefficients in the first three columns of the upper table are low, ensuring a stable correction of spherical aberration, coma and curvature of field. The final Petzval sum is of the same order as before. Only the fourth column shows large coefficients for the sixth and seventh surfaces, which means that distortion will not be so stable, but in the case of this rather asymmetric system which allows only limited field angles (up to $\pm 18^\circ$), this is not of great importance. Figure 1 shows the final form of lens.

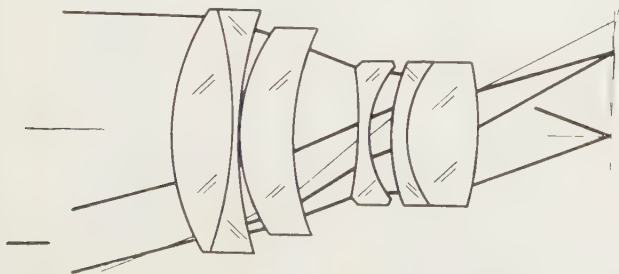


FIG. 1.

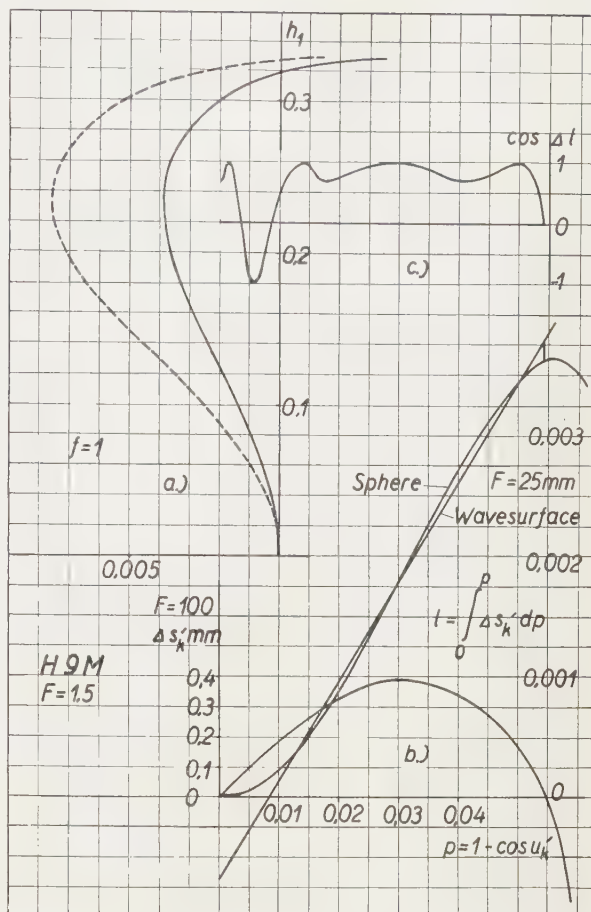


FIG. 2.

In figure 2, (a) shows the spherical aberration; (b) shows the wave surface using coordinates such that spheres with their centres on the axis of the system are straight lines; in this graph the abscissae are then nearly proportional to the areas of the corresponding zones of aperture; and (c) is a diagram of the cosine of the differences in wavelengths between the actual wavefront and the closest fitting sphere. Figures 2 (b) and (c) are drawn for a focal length of 25 mm [4], [5]. The last curve shows that the average cosine of the phase differences of the wavefronts is 0.7 so that the intensity of light at the focus will be 50 % of the intensity which could be reached by a perfect system; this is considered tolerable.

RÉFÉRENCES

- [1] D. ARGENTIERI, *Optica industriale*. Milano, 1942.
- [2] BEREK M. G. *Rundlagen der praktischen Optik*. Leipzig, 1930
- [3] F. I. HAVLIČEK, *Optik* 10, 1953, p. 475.
- [4] F. I. HAVLIČEK, *Optik* 11, 1954, p. 249.
- [5] F. I. HAVLIČEK, *Optik* 12, 1955, p. 123.

The stabilised retinal image

R. W. DITCHBURN and D. H. FENDER
University of Reading, England

SUMMARY. — A beam of light reflected from a mirror attached to a contact lens, worn by the subject, produces a test object whose image does not move across the retina in response to eye-movements. This is called the stabilised retinal image. In this paper, conditions for accurate stabilisation are discussed. It is shown that a small defect of stabilisation is important and that normal vision may be restored by introducing small movements which simulate some of the normal movements of a retinal image. Experiments on the stabilised image with light interrupted at different frequencies are described and it is shown that normal vision is obtained near the flicker fusion frequency.

SOMMAIRE. — Un rayon lumineux, réfléchi par un miroir fixé sur un verre de contact porté par le sujet, forme l'image d'un test objet dont l'image est immobile sur la rétine quels que soient les mouvements du globe oculaire; cette image est dite « stabilisée ». Le présent article traite des conditions requises pour une stabilisation très précise. Il sera montré qu'un léger défaut de stabilisation est important pour la vision normale et que cette dernière peut être rétablie à l'aide de petits déplacements de l'objet remplaçant quelques-uns des mouvements normaux d'une image rétinienne.

Des expériences sur l'image stabilisée, avec illumination intermittente à différentes fréquences, sont décrites; il est démontré que la vision normale se trouve rétablie pour une fréquence proche de la fréquence critique de papillotement.

ZUSAMMENFASSUNG. — Man kann ein sogenanntes stabilisiertes Netzhautbild in folgender Weise erzielen. Die Versuchsperson trägt ein Kontaktglas, an dem ein kleiner Spiegel befestigt ist. Ein Lichtbündel, das an diesem Spiegel reflektiert wird, dient zur Erzeugung des Bildes einer Prüfmarke, das trotz der Augenbewegungen auf der Netzhaut nicht auswandert. Die Bedingungen für eine genaue Stabilisierung werden untersucht. Es zeigt sich, dass schon ein kleiner Fehler in der Stabilisierung von Bedeutung ist und dass das normale Sehen durch künstliches Hervorrufen kleiner Bewegungen, welche die natürlichen Augenbewegungen annähernd nachahmen, wiederhergestellt werden kann. Es werden Versuche an dem stabilisierten Bild beschrieben, wobei die Beleuchtung mit wechselnder Frequenz unterbrochen wird. Es ergibt sich, dass in der Nähe der Flimmerfrequenz normales Sehen eintritt.

1. Introduction. — Earlier work on eye movements has shown that, when a subject is fixating as steadily as possible, the following eye movements are present :

- (i) a tremor of amplitude of the order of 15 sec. arc and frequency ranging from 30 to 80 c. p. s.
- (ii) a series of " flicks " of up to 20 min. arc occurring at irregular intervals ranging from 0.03 to 5.0 sec.
- (iii) slow drifts in the intervals between flicks.

Recent researches have shown that these eye movements play an important part in the visual process. Attempts have therefore been made to assess their importance by studying the effect on visual acuity when the eye views an object which moves so that its image on the retina does not move across the retinal receptors. This is described as a stabilised retinal image.

The production of a stabilised retinal image was first reported by DITCHBURN and GINSBORG [2] who noted that if the image consisted of a circular field divided vertically into halves of unequal brightness, the line of demarcation gradually disappeared. Shortly afterwards RATLIFF [9] also reported the production of a stabilised retinal image; subsequently RIGGS, RATLIFF *et al.* [10] gave the results of an extended investigation in which they reported that the ability to see a fine black line on a bright field gradually diminished whilst viewing such an image.

2. Methods of producing a Stabilised Retinal Image. — DITCHBURN and GINSBORG ([2] and [3]) used an apparatus as shown in figure 1. A test object is illuminated by parallel light. The lens L focuses the light on a mirror M worked on the side of the corneal bulge of a contact lens and forms an image of the test object

on a screen. The eye views the image on the screen in the two mirrors M_4 and M_5 .

These mirrors are arranged to give a visual path twice as long as the distance from the mirror M to the screen, so that the angular motion of the image seen by the eye is the same as that of the eyeball. The image

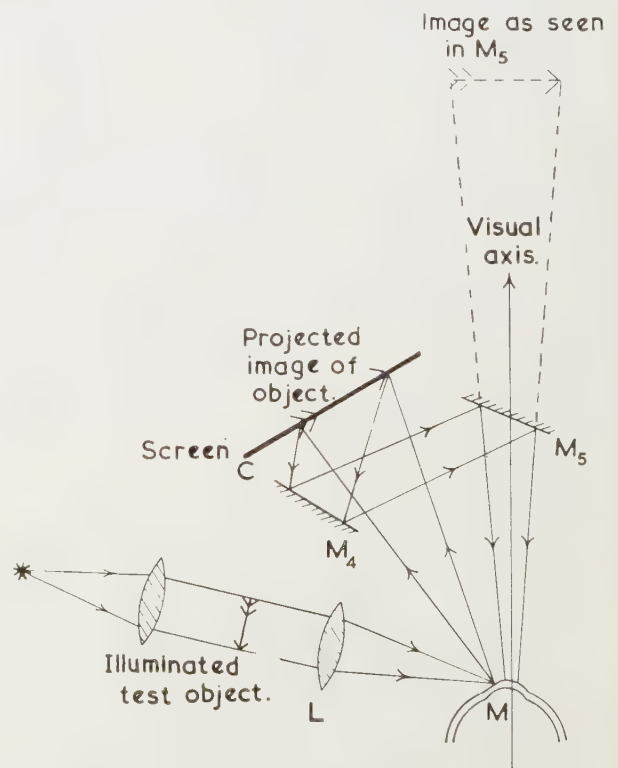


FIG. 1. — Original optical system for producing a stabilised retinal image as used by DITCHBURN & GINSBORG [2].

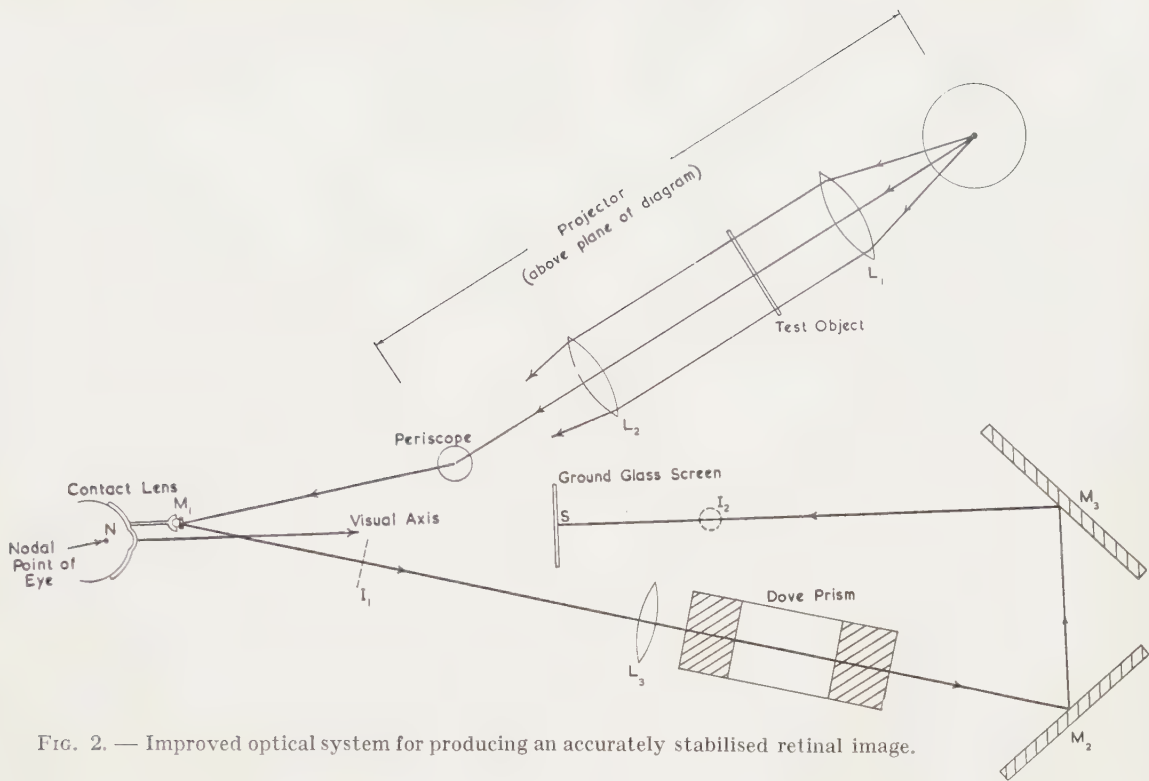


FIG. 2. — Improved optical system for producing an accurately stabilised retinal image.

on the retina therefore remains nearly stationary when the eye rotates in a horizontal plane. Stabilisation may be regarded as complete if the residual motion of the image on the retina is less than the size of one cone. This corresponds to about 0.1 min. arc in the visual field. With the apparatus just described stabilisation would not be complete in the vertical plane even if it was complete in a horizontal plane. Since the mirror *M* must be worked on the side of the corneal bulge of the lens (the normal to the mirror makes an angle of 35° with the visual axis in the lens used by DITCHBURN and GINSBORG [2]) only a component of the upward rotation of the eyeball appears in the upward movement of the reflected beam. With the system described above, the angular motion of the image in the vertical plane is only about 85 % of the motion of the eyeball. This fact led DITCHBURN and GINSBORG [2] and RIGGS and RATLIFF [10] to use test objects with vertical patterns, so minimising the effect of lack of vertical stabilisation.

Another factor tends to reduce the stabilisation in both planes. It has been shown by FENDER [5] that the eye makes torsional motions (that is, rotation about the visual axis) when fixating. These motions are of a random nature, not intimately connected with the other motions, and may range up to about 10 min. arc. If the normal to the mirror *M* is not parallel to the visual axis, components of this torsional motion appear in the vertical and horizontal motion of the projected image. These components may be as large as 5 min. arc, that is, sufficiently large to destroy the stabilisation completely.

If the effects mentioned above are to be avoided, the mirror *M* must be positioned so that the normal to its plane is parallel to the visual axis. This is done by mounting the mirror on a stalk attached to the contact lens as described by FENDER [5]. The mirror is fixed to a small steel ball which fits into a socket at the end of the stalk. This allows the mirror to be fitted to the contact lens after the latter has been placed in the eye. The plane of the mirror can then be accurately adjusted. The use of the stalk has the additional advantage that the mirror is not dimmed by eye fluids. When the subject is wearing a contact lens and the other eye is covered, the tendency to blink is much less than usual. Trouble due to disturbance of the system by blinks is very much less than might be expected and does not constitute a serious difficulty.

One further effect which impairs stabilisation is due to the motion of the mirror itself. Rotation of the eyeball causes both rotation and translation of the mirror attached to the contact lens. If the translatory motion has a component in the direction of the incident beam of light, it will cause a corresponding shift in the projected image. In the system shown in figure 1 this may amount to about 1 min. arc, which is again enough to destroy stabilisation. To avoid this, the projected beam of light should be incident on the mirror along the line passing through the centre of the mirror and the centre of rotation of the eye.

An apparatus designed with regard to the preceding discussion is shown in figure 2. Light from the ball of a pointolite lamp is rendered parallel by L_1 and illu-

minates the test object. L_2 focuses the source on the mirror M_1 and projects an image of the test object at I_1 .

The whole of this projector is for convenience placed above the level of the subject's eye; the light is brought down to the correct level by a periscope arrangement, the lower reflector of which is turned so that light strikes M_1 in the direction recommended above.

L_3 forms an image of I_1 on the ground glass screen S by reflection at M_2 and M_3 . L_3 reverses the direction of motion of the image with respect to the eye but this is corrected horizontally by the pair of mirrors M_2 and M_3 and vertically by the Dove prism.

In these circumstances, the retinal image is stabilised when.

$$(1) \quad 2(q - f)x = lf$$

where

q = equivalent path length from L_3 to S ,

f = focal length of L_3 .

x = distance from mirror M_1 to first image I_1 ,

l = distance from nodal point N of the eye to the screen S .

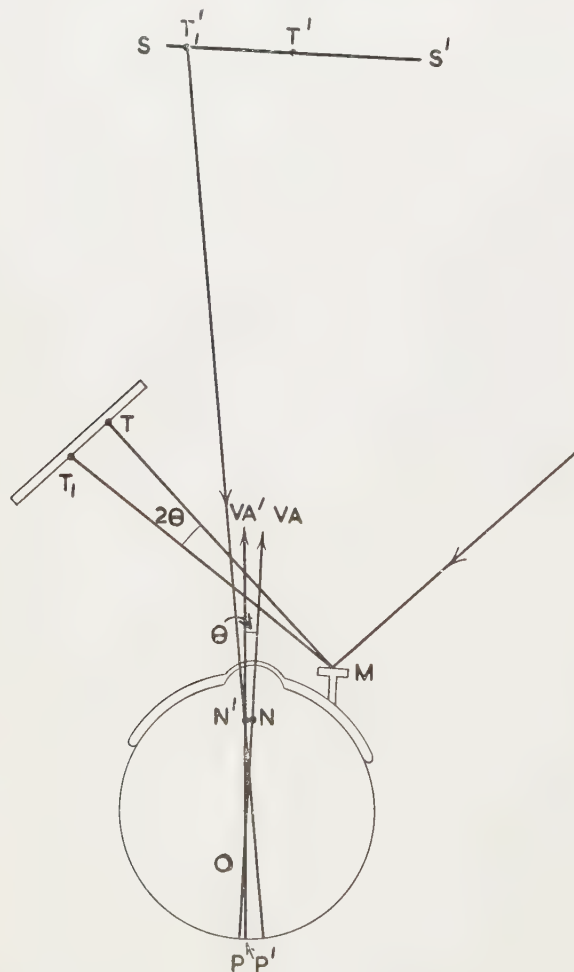


FIG. 3. — Effect of nodal point and centre of rotation of the eye on stabilisation.

The use of an image transmitted through a ground glass screen enables much higher brightnesses to be obtained than when the image is seen by reflection from a screen. For work at even higher brightness levels, the screen S may be replaced by a lens of focal length SI_2 (I_2 is the second image of the pointolite ball), the image is then seen by Maxwellian view.

The position of the nodal point and the centre of rotation of the eye must be known in order to set up the stabilising system accurately. This is shown by the following calculation.

Referring to figure 3, if the visual axis turns through an angle θ from the position VA to VA' about the centre of rotation O , then the projected image moves from T to T_1 where $TT_1 = 2\theta d$. d is the distance from the mirror to the image. This image is repeated in the plane SS' either by the mirror system of figure 1 or the optical system of figure 2. In either case, the effect is that the image moves from T' to T'_1 (equal to TT_1) SS' being at a distance D from the nodal point of the eye; the magnitude of D is determined below. If the nodal point N is at a distance r from the centre of rotation, then N will move to N' where $NN' = r\theta$. The linear motion of T' relative to N is thus $(2d\theta - r\theta)$ and the relative angular motion is $\theta(2d - r)/D$. Call this angle ϕ .

Let R be the distance from the retina to the centre of rotation of the eye; the nodal point is thus at a distance $(R + r)$ from the retina. The linear motion of the retinal image relative to N is $(R + r)\phi$ or $\{(R + r)\phi - r\theta\}$ relative to the original image point P . However this point P on the retina moves to P' where $PP' = R\theta$, thus the motion ε of the image relative to the retina is given by

$$\varepsilon = \{(R + r)\phi - r\theta\} - R\theta$$

$$= (R + r)(\phi - \theta)$$

If the retinal image is to be stabilised, ε must be zero, hence $(\phi - \theta)$ must be zero.

$$\text{But } (\phi - \theta) = \frac{\theta(2d - r)}{D} - \theta$$

$$= \frac{\theta(2d - r - D)}{D}$$

Thus $(2d - r - D) = 0$
or

$$(2) \quad D = (2d - r)$$

Unfortunately the positions of the nodal point and centre of rotation when wearing a contact lens are not easily determined. However, the optical system of figure 3 may be set up assuming likely positions for these two points and then a fine adjustment may be made in the following way.

The mirrors M_2 and M_3 are carried on a stage sliding along an optical bench parallel to the visual axis. The subject is asked to view a test object consisting of a black line crossing a bright circular field. Initially the retinal image is only partially stabilised, and al-

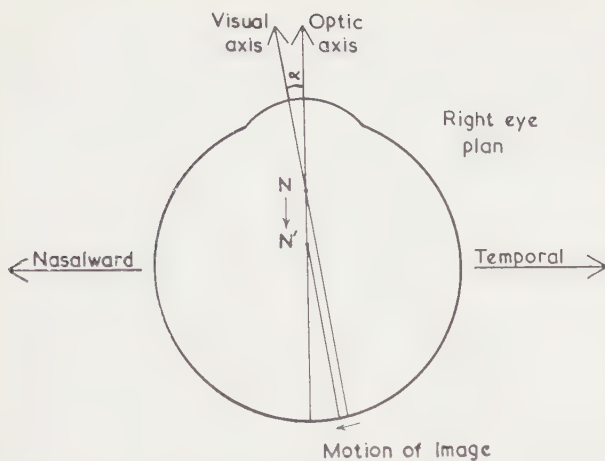


FIG. 4. — Effect of movement of the nodal point on stabilisation.

though the line disappears, it quickly reappears, presumably because motions of the eyeball can shift the image to new parts of the retina. The subject presses a key when he can see the line; this operates a timing mechanism and it is usually found that the line is visible for about 95 % of the viewing time. The stage carrying the mirrors is then moved slowly along the optical bench; this varies the factor q in equation (1) and so alters the magnification of the optical system, which has the same effect as varying D in equation (2).

At one position, it is found that the percentage of time for which the line is visible drops dramatically, being as low as 50 % for a black line of width 5 min. arc on a field of brightness 25 millilamberts. In the apparatus in use at present, it is found that a variation of q by about ± 2 mm. in 66 cm. reduces this stabilisation effect considerably. It is possible that the precision with which q can be determined by this method will lead to a measurement of the geometry of the optical system of the eye.

The nodal point of the eye does not occupy a unique position. It is known to change with accommodation and it has been suggested by FENDER [6] that the position of the nodal point is sensitive to colour. This, combined with the fact that the optical system of the eye is used off-axis, means that a change in accommodation can move the image across the retina (see fig. 4) and so destroy stabilisation.

The effect of this movement may be reduced by arranging that the image movement on the retina causes important straight boundaries in the pattern to move along their length. The angle α (fig. 4) is measured for each subject and the corresponding angle β in the vertical plane. The boundaries in the pattern are then set to make an angle $\tan^{-1} (\beta/\alpha)$ with the horizontal.

ARNULF [1] and co-workers have noted periodic fluctuations of accommodation, which occur at about the same frequency as the disappearance and regeneration of a stabilised image. These fluctuations

however are so small (of the order of 0.02 diopter) that they alone are probably not responsible for the regeneration of a stabilised image. A more probable explanation is that the subject, being presented with a most unusual visual experience, makes some convulsive movement and so upsets the stabilisation of the image. It is noticeable that older subjects with small accommodative range experience more complete stabilisation than do young subjects.

3. Effects of a stabilised Retinal Image on Vision. —

The most remarkable effect of stabilisation is of course the very rapid disappearance of a stabilised retinal image. This has been dealt with very fully by the authors mentioned, but one point should be emphasised — this is not a fatigue effect in the normally accepted sense; for if a black bar crossing a bright field forms the stabilised image, then, as reported by DITCHBURN [4] it is the black bar which disappears initially, the whole field becoming of uniform brightness.

The manner in which large illuminated patches disappear is of interest; circular patches first become diffuse at the edges, the effect then spreads both inwards and outwards, the image gradually becoming less bright and finally disappearing. Sometimes this effect is not complete and the whole visual field remains suffused with light. If the test patch has sharp corners, these are always the first to fade, reducing the image to a roughly circular patch which then behaves as described above.

4. Effects of introducing Artificial Movements to a Stabilised Retinal Image. —

The function of eye movements has been studied by causing a stabilised retinal image to move in a fashion which simulates the effect of eye movements; in every case it is found that an immediate regeneration of the image occurs.

Firstly, it has been found that tapping the apparatus introduces small vibrations which move the stabilised image through about 1 min. arc at a fairly high frequency, possibly about 100 c. p. s. such a vibration is similar to the "tremor" of a normal eye movement. This immediately regenerates a stabilised image if it has disappeared and also assists the eye in focusing on the test image. It appears that the information which enables an eye to focus an image is lost when the image is stabilised. More precise experiments of this kind are in hand at present.

Secondly, it is arranged that when a stabilised image (consisting of a fine dark line on a bright field) disappears, the subject presses a key. This immediately moves the image by about 10 min. arc on the retina, thus simulating a flick. Again the image is immediately regenerated. It is not suggested however that this is the primary function of a flick. In this respect the explanation offered by DITCHBURN and GINSBURG [3] seems much more probable.

5. Experiments on a Stabilised Image with interrupted Light. —

In previous experiments with the stabilised image, the illumination was continuous. We shall now describe some experiments with inter-

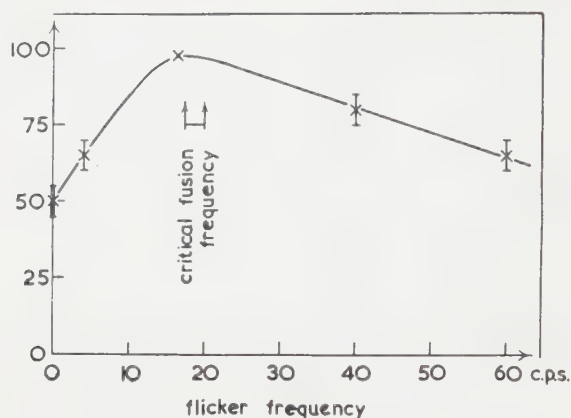


FIG. 5. — Visibility of a stabilised retinal image in interrupted light.

rupted light. In one experiment the subject viewed a test object consisting of a black line 5 min. arc wide on a bright circular field, diameter 1° and brightness 25 millilamberts. The source of light was then interrupted (equal periods of dark and light) at various frequencies. The subject pressed a key which operated a timing device whenever the black line was visible. Figure 5 shows the percentage of time for which the line was visible at several frequencies. The total viewing time was always 30 sec. It will be noticed that the curve has a peak of 97 % at about the flicker fusion frequency for the subject. Points on the curve could be determined with a probable error of about $\pm 5\%$ except the peak value, which is reproducible to a higher order of accuracy.

Whilst conducting these experiments, the subjects complained of the brightness of illumination at high interruption rates. This was surprising as the mean illumination remained constant at about 10 millilamberts throughout the experiment. One subject in fact estimated the brightness to be of the order of 1 000 millilamberts!

In order to test this effect, an attempt has been made to measure the apparent brightness of the interrupted image. The projector of figure 3 is replaced by that shown in figure 6. The stabilised image now consists of a circular field divided into halves. One half is illuminated with continuous light and the other with interrupted light. A photometric wedge controlled by the subject is introduced into the interrupted light path and the subject is asked to match the brightness of the two halves of the field whenever the continuous half regenerates.

Some very anomalous results have been obtained. Initially the interrupted half of the field is set by the experimenter to a lower brightness than the continuous half; the subject describes the interrupted half as the brighter, but when told to make a match, always moves the wedge so as to make this half brighter still. This of course is the direction in which the wedge should be moved to achieve a true photometric match between non-stabilised images, but the subject always overshoots the correct position and continues searching to the end of the wedge.

6. Discussion. — Work on the electrical impulses transmitted by individual fibres of the optic nerve (HARTLINE [8] and GRANIT [7]) shows that, for some

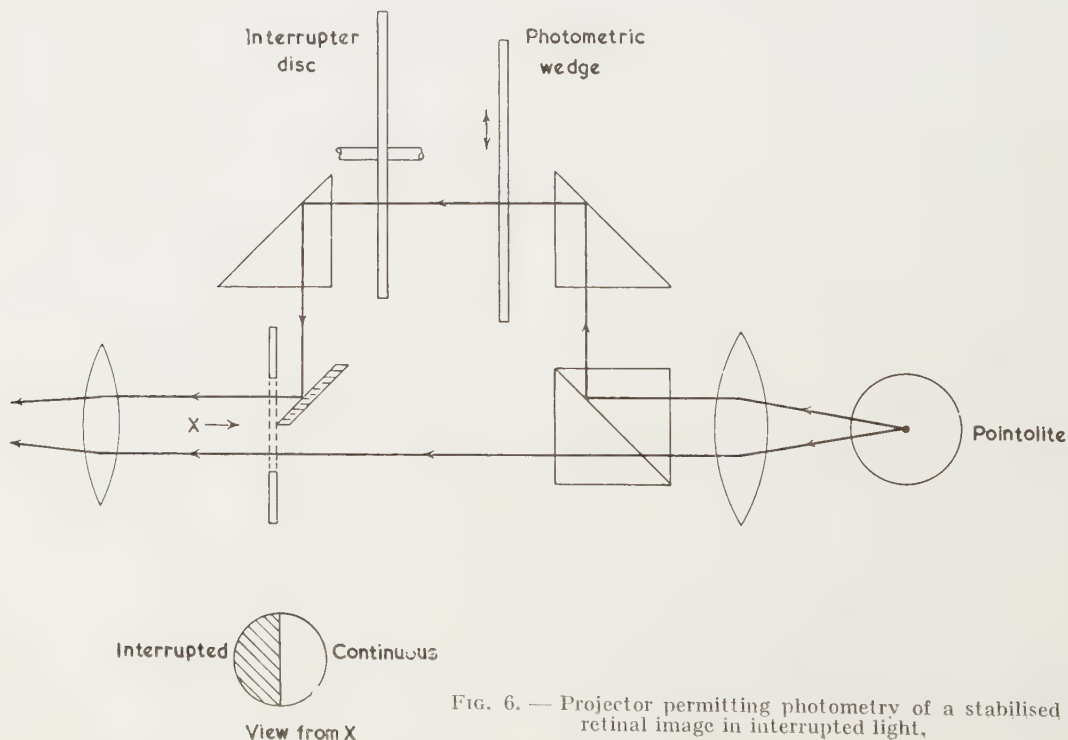


FIG. 6. — Projector permitting photometry of a stabilised retinal image in interrupted light.

retinas, a nerve fibre carries a large burst of impulses at a high initial rate when the receptor connected to the nerve is illuminated. If the illuminations is maintained at a steady value, the rate of transmission of impulses falls to a low value — sometimes to zero. There may be a further large burst of impulses when the illumination ceases. The exact behaviour of the individual receptors of the human retina is not known but it is likely to be generally similar to that described above. DITCHBURN [4] has shown that this leads to a simple theory of the function of normal eye-movements and of previously reported results on the stabilised retinal image.

The new observations described in this paper appear to fit in with this hypothesis. Let us consider a simple pattern consisting of a light area and a dark area. In normal vision the nerve fibres connected to receptors near the retinal image of the dividing line are strongly stimulated, because these receptors are subject to rapid changes of illumination owing to the tremor motion of the eyeball. The other movements of the eye ensure that no one set of receptors has this strong stimulation for very long because the image of the boundary is continually being moved.

With continuous illumination and an accurately stabilised retinal image, all receptors receive constant stimulation and the image fades as the initial burst of nerve impulses dies down. The subject can no longer appreciate a sharp edge and therefore it becomes difficult to focus.

If stabilisation is not very accurate, the image is quickly regenerated either by a large fluctuation of accommodation or by the flick movement. The size of a flick ranges up to 20 min. arc, so that if the compensation of eye movements is only 99 % complete, a flick could move the image by about one cone diameter. Thus the adjustment of the apparatus for complete stabilisation should be fairly critical and the percentage of time for which the image is not seen should increase rapidly as we approach complete stabilisation.

The extent to which the stabilisation described in this paper is better than that previously obtained is shown by the fact that RIGGS and RATLIFF [10] observed the disappearance of a line 35 sec. arc wide on a field of brightness 5 ft-lamberts. In the present experiments a test object consisting on a line 5 min. arc wide on a field of brightness 25 millilamberts disappeared for 50 % of the time.

With interrupted illumination and stabilisation, the same group of receptors is continually subject to changing illumination. These receptors may thus, with

only moderate illumination, be made to generate repeated large bursts of impulses in the nerve fibres. This gives the impression of painfully bright illumination. It may be that, for some nerve fibres, a saturation level is reached under these conditions. When this happens the subject, using the apparatus shown in figure 6, may be expected not to be able to judge whether the movement of the photometric wedge increases or decreases the illumination.

The results shown in figure 5 can be explained in the following way. At very low interruption frequencies, normal vision is restored momentarily each time the illumination increases and probably each time it goes off. This should reduce the percentage of time for which the stabilised image disappears. The condition improves as the interruption rate increases until the time between successive periods of illumination is too small for the receptor/nerve fibre system to recover appreciably, whereupon the condition will worsen once more. When the frequency of interruption is very high, the illumination will be effectively continuous. From the above discussion, we expect the maximum of the curve of figure 5 to occur at about the flicker fusion frequency. We also expect the light to be effectively continuous when the frequency of interruption is of the same order as the rate of the initial discharges of the nerve fibres, that is, rather more than 50 c. p. s.

It is, of course, likely that the above simple discussion will need a great deal of extension and modification when more detailed results are available.

7. Acknowledgements. — The authors wish to thank the Council of Reading University for a special grant in support of this research. They also wish to thank Mr R. M. PRITCHARD for acting as subject in many of these experiments.

Manuscrit reçu le 20 avril 1955

REFERENCES

- [1] A. ARNULF, O. DUPUY, and F. FLAMANT, *C. R. Ac. Sc.*, **232**, 1951, p. 438.
- [2] R. W. DITCHBURN and B. L. GINSBORG, *Nature*, **170**, 1952, p. 36.
- [3] R. W. DITCHBURN and B. L. GINSBORG, *J. Physiol.*, **119**, 1953, p. 1.
- [4] R. W. DITCHBURN, *Opt. Acta*, **1**, 1955, p. 171.
- [5] D. H. FENDER, *Brit. J. Ophthal.*, **39**, 1955, p. 65.
- [6] D. H. FENDER, *Brit. J. Ophthal.*, **33**, 1955, p. 291.
- [7] R. GRANIT, *Sensory Mechanisms of the Retina*, 1947, London. O. U. P.
- [8] H. K. HARTLINE, *J. O. S. A.*, **30**, 1940, p. 239.
- [9] F. RATLIFF, *J. Exptl. Psych.*, **43**, 1952, p. 163.
- [10] L. A. RIGGS, F. RATLIFF, J. C. CORNSWEET and T. N. CORNSWEET, *J. O. S. A.*, **43**, 1953, p. 495.

Peripheral and foveal dark-adaptation curves as a function of luminance and wavelength ⁽¹⁾

Ir J. J. MERTENS,

Research Depart. N. V. Kema, Arnhem, The Netherlands

SUMMARY. — *Peripheral and foveal dark-adaptation curves were measured after stimulation by luminances ranging from 1300 to 0.7 cd/m² for red, yellow, green and violet light-adaptation field and test spot. It was found that the dark-adaptation time of the cone apparatus depends but slightly on the colour of the stimulating field and the test spot. The dark-adaptation time of the rod apparatus appeared to be strongly dependent on the colour of the stimulating field (fig. 4). Typical peripheral adaptation curves are shown in figures 1, 2 and 3. Some typical phenomena in foveal adaptation are mentioned in section 3.2.*

SOMMAIRE. — *Les courbes d'adaptation à l'obscurité pour la fovéa et la région extrafovéale ont été déterminées après stimulation par des luminances allant de 1 300 à 0,7 cd/m² pour les lumières rouge, jaune, verte et violette du champ d'adaptation et de la plage de mesure.*

On a trouvé que le temps d'adaptation à l'obscurité des cônes ne dépend que peu de la couleur du champ d'adaptation et de la plage de mesure. Le temps d'adaptation des bâtonnets dépend au contraire fortement de la couleur du champ d'adaptation (fig. 4). Des courbes types d'adaptation périphérique sont données sur les figures 1, 2, 3. Quelques phénomènes typiques obtenus dans l'adaptation fovéale sont mentionnés dans la section 3.2.

ZUSAMMENFASSUNG. — *Es wurden die peripheren und fovealen Dunkeladaptationskurven nach der Reizung mit Leuchtdichten zwischen 1 300 und 0,7 cd/m² für rotes, gelbes, grünes und violettes Licht im Adaptationsfeld und Prüffleck gemessen. Es ergibt sich, dass die Zeit der Dunkeladaptation des Zapfenapparates nur wenig von der Farbe der Helladaptation und des Prüffleckes abhängt. Die Zeit für die Dunkeladaptation des Stäbchenapparates hängt aber stark von der Farbe des Helladaptationsfeldes ab (Abb. 4). Die Abbildungen 1, 2 und 3 zeigen typische periphere Adaptationskurven. Einige auffallende Erscheinungen bei der fovealen Adaptation werden im Abschnitt 3.2 erörtert.*

1. Introduction. — The process of dark adaptation has been frequently investigated by measuring dark-adaptation curves, which represent the minimum perceptible luminance of a test spot against a dark background as a function of time after exposure of the eye to a bright stimulating light source. The influence of the wavelength of the stimulating light upon peripheral dark adaptation was measured by HULBERT [1], the influence of the wavelength of the test light by KOHLRAUSCH [2]. MANDELBAUM and MINTZ [3] measured the influence of both factors upon the foveal adaptation curve.

The present article deals with an extension of these measurements. Peripheral dark-adaptation curves were measured 7° temporally from the fovea of the left eye of two observers (J. M. and H. H.) with monochromatic violet (436 mμ), green (546 mμ), yellow (578 mμ) and red (644 mμ) stimulating light and monochromatic violet, green and yellow test light. In addition, a non-monochromatic red test light with a dominant wavelength of 650 mμ was used. The monochromatic light was produced by a high-pressure mercury-cadmium vapour lamp, combined with colour filters, the non-monochromatic light by a tungsten ribbon lamp with a temperature of 2 000°K, combined with a Corning glass filter C 2403. The luminance of the stimulating field was nearly 1 000, 100, 10 and 1 cd/m² in different measuring cycles. Foveal dark-adaptation curves were measured for the same monochromatic violet, green and yellow stimulating and test light.

⁽¹⁾ The investigations described in this article were made under the auspices of the "Nederlandse Stichting voor Verlichtingskunde". The author is now with Research Laboratory AKU and Affiliated Companies, Arnhem.

2. Peripheral measurements.

2.1. Measuring arrangement and procedure. — The measurements of peripheral dark-adaptation (d.a.) curves were made with the aid of an adaptometer, consisting principally of a circular light-adaptation (l.a.) field with a diameter of 14° and a square test spot with sides of 2°. The latter was situated in a direction perpendicular to that of the l.a. field, but could be seen by the observer in the direction of the l.a. field with the aid of a rotatable mirror. The spot of the retina on which the l.a. field and the d.a. test spot were focused was fixed with the aid of a small red fixation light. The luminance of this fixation light was dimmed gradually during dark adaptation. The observer used an artificial pupil with a diameter of 2.4 mm; his head was held in one position by a mouth-piece mounting. The test spot was shown to the observer during 0.18 sec each second.

The luminance of the l.a. field was adjusted by means of grey filters to a number of values, ranging from 1300 to 0.7 cd/m². The luminance of the d.a. test spot could be continuously adjusted by the observer during dark adaptation by moving a diaphragm in the light beam which illuminated the test spot. The setting of the diaphragm was recorded on a strip of paper as a function of time. When the luminance of the test spot reached the instantaneous brightness threshold value, the observer pushed a button, making a mark on the recording strip.

After a pre-dark adaptation of half an hour, the observer adapted to the l.a. field for 3 minutes. Then he generally measured successively three adaptation curves for different l.a. luminances or colours. The

first measurement of the luminance threshold after l. a. occurred 12 seconds approx. after the beginning of the d. a. Afterwards, as many threshold values were determined as the observer thought necessary for a correct determination of the d. a. curve. In the period of quickly changing adaptation conditions, the threshold was considered to be that luminance of the test spot at which this spot became just invisible for the observer. In the period of slowly changing adaptation conditions, the luminance at which the observer estimated the chance of observation of the (periodically shown) test spot to be 50 % was taken as threshold value. The luminances of the stimulating field and the test spot were measured with the colour-filter method ([4] p. 297), using a photometer with Maxwellian view ([4] p. 152). One half of the lens of the photometer projected light of the stimulating field or test spot to the observer's eye, the other half light of a standard

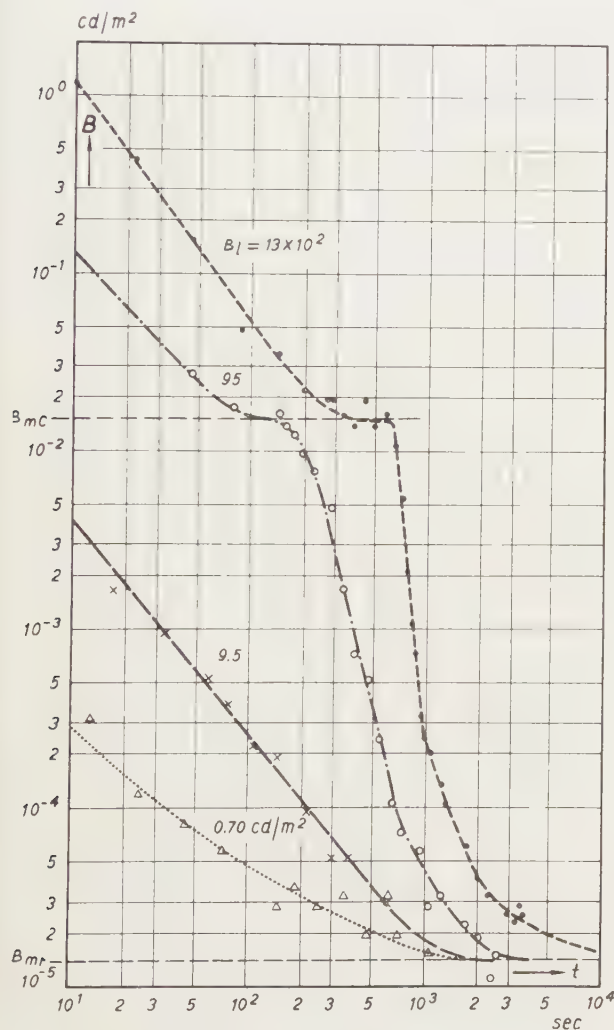


FIG. 1. — Peripheral dark-adaptation curves measured by J. M. with a violet monochromatic test light ($\lambda_d = 436 \text{ m}\mu$) after stimulation by monochromatic violet light ($\lambda_1 = 436 \text{ m}\mu$) for 4 luminances B_1 . B_{mc} is the minimum brightness threshold of the cone apparatus, B_{mr} that of the rod apparatus.

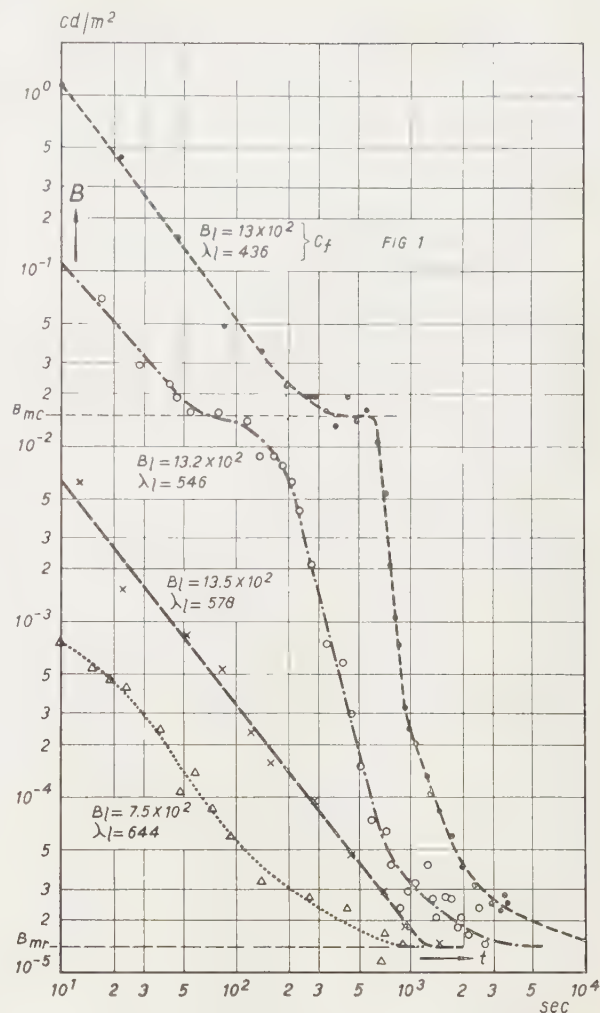


FIG. 2. — Peripheral dark-adaptation curves measured by J. M. with a monochromatic violet test light ($\lambda_d = 436 \text{ m}\mu$) after stimulation by nearly equal luminances B_1 in cd/m^2 and monochromatic light of wavelength λ_1 (in $\text{m}\mu$).

source (tungsten ribbon lamp of known temperature).

The measurements with green and yellow light were checked with a calibrated Weston photronic cell with Viscor correction filter. The agreement between the two methods was better than 10 %.

2.2. *Measuring results.* — Only the results of observer J. M. will be given, as those of H. H. are almost identical.

Adaptation curves showing the general aspects of a change of the luminance of the stimulating field, the colour of that field and the colour of the test field are presented in figures 1, 2 and 3 respectively. The break in some of the curves indicate the presence of both cones and rods peripherally. The minimum luminance thresholds of the cone and rod systems are indicated in the figures by B_{mc} and B_{mr} respectively.

The curves of figure 2 were shifted along the ordinate axis so that the thresholds B_{mr} coincide.

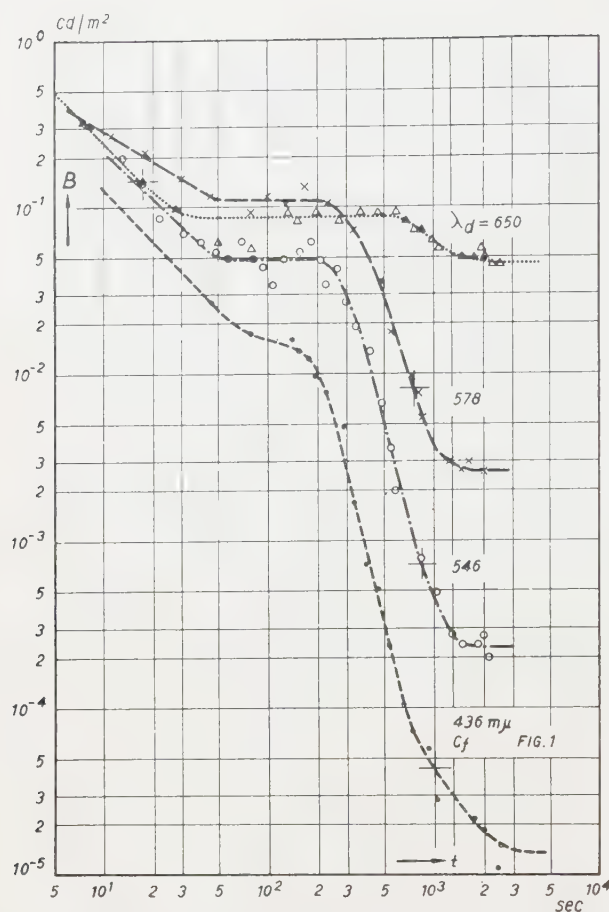


FIG. 3. — Peripheral dark-adaptation curves measured by J. M. after stimulation by monochromatic violet light ($\lambda_1 = 436 \text{ m}\mu$) and the luminance $B_1 = 95 \text{ cd/m}^2$ with four test spots, emitting light with wavelength λ_d .

The actual values of the thresholds for wavelength 436, 546, 578 and 644 $\text{m}\mu$ were 1.4, 0.85, 1.1 and $1.2 \times 10^{-5} \text{ cd/m}^2$ respectively.

The different values of B_{mr} for different λ_d in figure 3 are due to the unit of luminance used; viz. the cd/m^2 . This unit is related to cone vision. However, the second part of the curves of figure 3 refers to rod vision. If the ordinates were expressed in "scotopic" cd/m^2 , the values B'_{mr} calculated from all measurements with the aid of the scotopic luminosity factor V'_λ (CIE, 1951) would differ by less than a factor of 2.5 (table I). The formula used in this calculation can be written :

$$(1) \quad B'_{mr} = \frac{1746}{680} \frac{V'_\lambda}{V_\lambda} B_{mr}$$

where the luminances are assumed to be monochromatic.

Adaptation times $t_{1/4}^r$ were derived from the adaptation curves measured. $t_{1/4}^r$ is the time required to

observe a luminance $B_{1/4}^r$ which is $1/4$ log unit (a factor 1.8) greater than the minimum luminance thresh-

TABLE I

Average threshold luminance, expressed in photopic cd/m^2 (B_{mr}) and "scotopic" cd/m^2 (B'_{mr}), derived from all measurements and the CIE visibility curves for photopic and scotopic vision (V_λ , V'_λ resp.).

λ in $\text{m}\mu$	B_{mr}	V'_λ/V_λ	B'_{mr}
650	3.8×10^{-2}	0.00632	6.2×10^{-4}
578	2.3×10^{-3}	0.153	9.0×10^{-4}
546	2.5×10^{-4}	0.557	3.6×10^{-4}
436	1.2×10^{-5}	15.3	4.6×10^{-4}

hold B_{mr} . This time was considered to be the maximum adaptation time which could be derived with sufficient accuracy from the adaptation curves. The values of $t_{1/4}^r$ are collected in table II.

TABLE II

Dark adaptation time $t_{1/4}^r$ for the rod system as a function of the wavelength λ_1 and the luminance B_1 of the stimulating field and the wavelength λ_d of the dark-adaptation test light.

λ_1 in $\text{m}\mu$	B_1 in $\text{cd/m}^2 \times 10^{-2}$	λ_d in $\text{m}\mu$			
		436	546	578	650
		$t_{1/4}^r$ in sec $\times 10^{-2}$	$t_{1/4}^r$ in sec $\times 10^{-2}$	$t_{1/4}^r$ in sec $\times 10^{-2}$	$t_{1/4}^r$ in sec $\times 10^{-2}$
436	13.0	33	32	22	25
	0.95	15.0	10.5	9.5	7.2
	0.095	7.0	7.0	4.6	3.3
	0.0070	3.5		3.0	
546	13.2	13.5	13.5	9.2	7.8
	1.20	5.6	5.2	4.5	2.6
	0.108	2.6	2.2	1.65	0.85
578	13.5	7.8	7.8	5.6	4.6
	1.18	4.2	3.8	2.1	1.40
	0.130	1.85	1.10	1.30	0.85
644	7.5	2.7	2.6	2.3	1.25
	0.75	(1.4)	1.45	1.50	0.90
	0.092	(1.2)	0.95	1.25	0.64

Similarly, adaptation times $t_{1/2}^c$ were determined from the adaptation curves in which a cone plateau could be determined. Here $t_{1/2}^c$ is the time required to observe a luminance $B_{1/2}^c$ which is $1/2$ log unit (a factor 3.2) greater than the minimum luminance threshold B_{mc} of the cone apparatus. These data are collected in table III.

TABLE III

Dark adaptation time $t_{1/2}^c$ for the cone system as a function of B_1 , λ_1 and λ_d .

λ_1 in $m\mu$	B_1 in cd/m^2 $\times 10^{-2}$	λ_d in $m\mu$			
		436	546	578	650
		$t_{1/2}^c$ in sec	$t_{1/2}^c$ in sec	$t_{1/2}^c$ in sec	$t_{1/2}^c$ in sec
436	13.0	110	66	46	85
	0.95	26	14.0	10.0	9.0
	0.095			(6.0)	(3.0)
546	13.2	21	20	24	18.0
	1.20				12.0
578	13.5		18.0	22	22
	1.18				6.0

2.3. *Discussion.* — Table II shows that the adaptation time of the peripheral retina is greatest for a violet test light and decreases for a green, yellow and red test light respectively when λ_1 and B_1 are taken as constant. The qualitative course of the curves for $t_{1/4}^r$ as a function of λ_1 is almost the same for the different wavelengths λ_d , when B_1 is taken as constant. Therefore, the mean value $\bar{t}_{1/4}$ of $t_{1/4}^r$ for different wavelengths λ_d at the same wavelength λ_1 was calculated and plotted against λ_1 for luminances $B_1 = 1\,000$, 100 and 10 cd/m^2 (fig. 4).

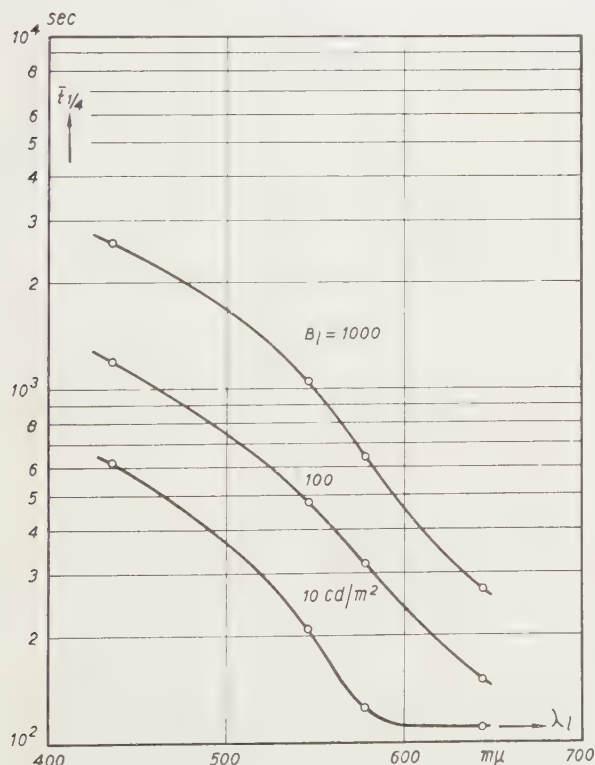


FIG. 4. — Mean dark adaptation time $\bar{t}_{1/4}$ for the rod system after stimulation with monochromatic light of wavelength λ_1 at a luminance B_1 of 10, 100 and 1 000 cd/m^2 resp.

A similar curve to that found for $B_1 = 10\,cd/m^2$ was measured by HULBURT [1]. Because of differences in measuring procedure, the curves are not fully comparable; the slope measured by the present author is larger than measured by HULBURT but in better agreement with measurements of HECHT and HSIA [5]. The latter authors measured a factor 3 for the ratio of adaptation time after stimulation by white light and red light respectively.

The curves in figure 4 were drawn for $B_1 = \text{constant}$ (10, 100 and 1 000 cd/m^2 resp.). Re-calculating the measured results in scotopic luminances with the aid of eq. (1), it appeared that the curve for $B_1' = 100$ scotopic cd/m^2 (1) is nearly independent of the wavelength λ_1 . The constant value of $\bar{t}_{1/4}$, found in this way, is 420 sec approximately. Because of small influences of λ_d (table II) and the different shapes of the curves of figure 4 at the longer wavelengths, it is not possible to generalise the conclusion drawn from the curve for $B_1' = 100$ scotopic cd/m^2 to all other values of B_1' .

From table III it can be seen that the influence of green and yellow stimulation light upon $t_{1/2}^c$ is small. The same result was found by MANDELBAUM and MINTZ [3] in *foveal* measurements. That, relatively, $t_{1/2}^c$ after stimulation by violet light is greater than for the other wavelengths and also greater than was found by MANDELBAUM and MINTZ, can be understood from the fact that at 7° peripherally macular pigment is absent. However, M. and M. did not find such a great influence of the colour of the test spot upon $t_{1/2}^c$ after stimulation by violet light as is shown in table II.

3. Foveal measurements.

3.1. *Measuring arrangement and procedure.* — Except for the following items, the measurements were made in a similar way to that described in 2.1.

The sides of the square test field subtended a visual angle of 1° . The red fixation light was replaced by an arrangement shown in figure 5. The fixation point is the point of intersection of the two rows of fixation lights. During light adaptation the observer looked as far as possible at the centre of the circular stimulating field.

The minimum luminance at which the test spot could be observed was determined in three different ways:

- similar to that described in 2.1, but with the test spot shown for 0.033 second every 2 seconds;
- the test spot was shown continuously. The observer determined the luminance at which the test spot just disappeared;
- the observer determined the chromatic threshold, that is the luminance of the test spot at which he

(1) This value was chosen because the values of B_1' then fall in the range of values given in fig. 4.

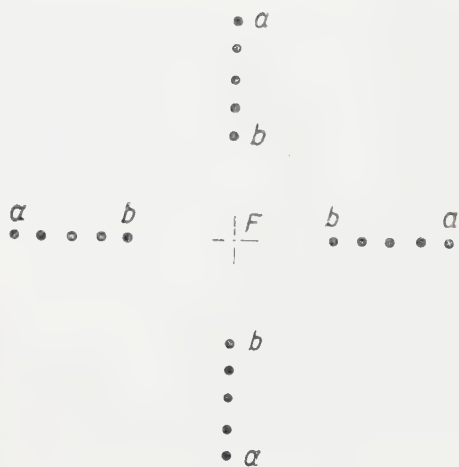


FIG. 5. — The fixation point F is defined as the imaginary point of intersection of the lines of point sources ab . The points b were presented at an angle to the fixation axis of about 6° and the points a at an angle of 13° .

could just detect the colour of that spot. The colour was previously unknown to him as the test colours were changed in a random order and the luminance was only increased starting from an invisible test spot. The observed colour was checked afterwards.

The pre-dark adaptation time was decreased to one quarter of an hour. Each dark adaptation curve was derived from two to four runs.

3.2. Measuring results. — Most measurements were made with violet and yellow stimulation light and test spot, in order to make conditions for adaptation as extreme as possible. The adaptation time $t_{1/2}^c$, defined in 2.2, was measured for continuous test spot and for chromatic thresholds (Cf. 3.1 b, c). The dark adaptation time $t_{1/2}^c$ after stimulation by the same colours and aluminance of $1\,300\text{ cd/m}^2$ differed only by a factor 1.5 for the different wavelengths of the test light. The significance of the differences was not shown, because the measurements were difficult and rather inaccurate. The average time $t_{1/2}^c$ after stimulation by violet light was 1.3 times greater than after stimulation by yellow light. Generally, the results did not contradict those of MANDELBAUM and MINTZ.

It was found that the foveal dark-adaptation curve measured by J. M. after stimulation by yellow light (B_1 is $1.9 \times 10^4\text{ cd/m}^2$) had a break both for periodically and for continuously presented violet test spots (fig. 6). The break might be caused by the presence of rods in the fovea (POLYAK, [6]). However, there is a difference with regard to the peripheral results, because no such a break was found when instead of yellow light, green stimulation light was used with a stimulation luminance up to $13 \cdot 10^4\text{ cd/m}^2$ (fig. 6). The possible influence of rods in foveal adaptation measurements complicates an interpretation of re-

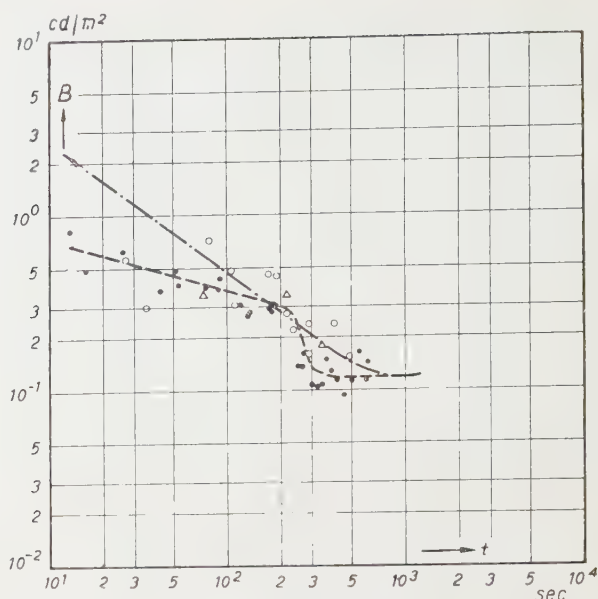


FIG. 6. — Foveal dark-adaptation curve measured by J. M. after stimulation by

1. monochromatic yellow light ($\lambda_1 = 578\text{ m}\mu$) and luminance $B_1 = 1.9 \times 10^4\text{ cd/m}^2$ with a periodically presented violet test spot ($\lambda_d = 436\text{ m}\mu$), subtending a visual angle of 1° approx. The measured points were obtained at 3 measuring sessions which are shown differently.

2. monochromatic green light ($\lambda_1 = 546\text{ m}\mu$) and luminance $B_1 = 13 \cdot 10^4\text{ cd/m}^2$ (—). Average curve from 3 measuring sessions.

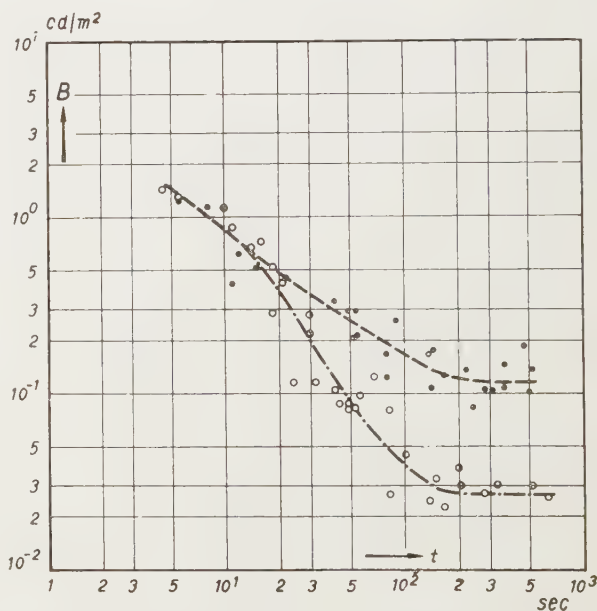


FIG. 7. — Foveal adaptation curves measured by J. M., after stimulation by monochromatic violet light ($\lambda_1 = 436\text{ m}\mu$) and luminance $B_1 = 14 \times 10^2\text{ cd/m}^2$, with a monochromatic violet test light ($\lambda_d = 436\text{ m}\mu$) which was presented either continuously (circles) or periodically (0.033 sec. per 2 sec., dots).

The curves were measured in two separate measuring cycles.

sults such as those of MANDELBAUM and MINTZ upon the basis of a trichromatic colour system.

The adaptation curves measured with a periodically presented violet test spot (Cf. 3.1 a) after stimulation by violet light and a luminance B_1 of 14×10^2 cd/m² appeared to be different from those measured after the same stimulation but with a continuously presented violet test spot. The ratio of the luminance threshold for a periodically presented test spot to that for a continuously presented test spot increased with dark adaptation time. This ratio increases from 1 to 4.3 for the curves shown in figure 7 and is of the order of magnitude to be expected from BLONDEL and REY's formula [7], extended for supra-liminal light flashes by HAMPTON [8].

Acknowledgements. — The author wishes to thank

Dr J. J. WENT, Head of the Research Department of the N. V. Kema for many valuable discussions and Dr G. A. W. RUTGERS of that Department for his stimulating advice and help during the preparation of the manuscript. He also wishes to acknowledge the help of Mr H. E. J. HUTJES in obtaining one part of the experimental data.

REFERENCES

- [1] E. O. HULBURT, *J. O. S. A.* **41**, 1951, p. 402.
- [2] A. KOHLRAUSCH, *Pflügers Arch. f. d. ges. Physiol.* **196**, 1922, p. 113.
- [3] J. MANDELBAUM and E. MINTZ, *Am. J. Ophthalm.* **24**, 1941, p. 1241.
- [4] J. W. T. WALSH, *Photometry*, 2nd Ed, 1953.
- [5] S. HECHT and Y. HSIA, *J. O. S. A.* **35**, 1945, p. 261.
- [6] S. POLYAK, *Docum. Ophthalm.* **3**, 1949, p. 24.
- [7] A. BLONDEL and J. REY, *J. Phys. et Rad.* **1**, 1911, p. 530.
- [8] HAMPTON W. M., *Trans. Ill. Enging. Soc.* **17**, 1952, p. 63.

Sur la sensibilité différentielle de l'œil aux couleurs dans l'échelle de Newton notamment pour les teintes sensibles

Erik INGELSTAM ET Lars JOHANSSON

Laboratoire d'Optique, Ecole Royale Polytechnique Supérieure, Stockholm 70

SOMMAIRE. — Une étude expérimentale a été faite sur la sensibilité différentielle de l'œil pour les couleurs interférométriques selon l'échelle de NEWTON, à l'intérieur et autour de la teinte sensible du premier ordre. Le but de cette étude était la mesure des gradients du chemin optique au moyen d'une lame double de quartz envisagée par FRANÇON, le champ de vision étant par conséquent en forme de ruban assez étroit. L'écart moyen des mises au point se révéla être de 8 Å environ dans le domaine le plus sensible. Un gradient ou une différence de chemin optique quelconque peut être mesuré avec la précision correspondante de 20 Å, au moyen d'un compensateur fonctionnant comme méthode de zéro à la teinte sensible. Les coefficients de diffusion propre des liquides très dilués sont accessibles avec la même précision que ceux des liquides plus concentrés mesurés avec les méthodes ordinaires.

ZUSAMMENFASSUNG. — Die Fähigkeit des Auges, die interferometrischen Farben in der Newtonschen Skala zu unterscheiden, besonders an und neben der empfindlichen Farbe erster Ordnung, wird einem experimentellen Studium unterzogen. Es sollen dabei Gradienten der optischen Wege mit Hilfe der von FRANÇON angegebenen Quarzdoppelplatte gemessen werden. In Übereinstimmung hiermit ist das Blickfeld bandförmig angeordnet. Die entsprechende mittlere Abweichung der Einstellungen wurde in dem empfindlichsten Gebiet zu 8 Å bestimmt. Ein optischer Gradient oder eine Gangdifferenz irgendwelcher Grösse kann mit der entsprechenden Genauigkeit von 20 Å gemessen werden, wenn man einen mit der empfindlichen Farbe als Nullmethode arbeitenden Kompensator verwendet. Selbstdiffusionskoeffizienten von sehr verdünnten Lösungen können so mit derselben Genauigkeit gemessen werden, wie man sie bei konzentrierteren Lösungen mit gewöhnlichen Methoden erhält.

SUMMARY. — An experimental determination was made of the eye's ability to discriminate interference colours along the Newtonian scale within and on both sides of the first order sensitive colour. The application aimed at is to measure optical path gradients by means of the double quartz plate as suggested by FRANÇON and accordingly the field of view consists of a fairly narrow band. The mean deviation of the settings was found to correspond to about 8 Å in the most sensitive region. Any gradient or path difference value can be measured with the corresponding accuracy of 20 Å by means of a compensator acting as zero method at the sensitive colour. Coefficients of self-diffusion of very dilute solutions may be measured as accurately as those of higher concentration with ordinary methods.

Introduction. — En interférométrie en lumière polarisée, l'emploi de la lumière blanche et l'observation des couleurs interférentielles permettent des mesures quantitatives. Si les deux ondes qui interfèrent ont même amplitude, les couleurs sont celles qu'utilisait déjà NEWTON pour la mesure des différences de marche [1]. Dans l'optique contemporaine, l'exemple le plus connu d'une telle mesure est la photoélasticimétrie, où l'on obtient les courbes isochromatiques correspondant aux retards de marche dus à la biréfringence du spécimen, mais la méthode est également importante pour les spécimens isotropes. Dans le dernier cas, le retard de marche optique est

introduit par des cristaux biréfringents, on trouve des récents exemples de telles constructions dans le microscope interférentiel de SMITH [2] et de NOMARSKI [3], et dans les oculaires interférométriques de FRANÇON [4].

La méthode de FRANÇON n'a pas, à notre connaissance, été utilisée pour des mesures réelles dans le microscope, mais principalement pour rendre visibles des retards de marche entre différentes parties d'objets transparents. L'un de nous [5] a utilisé cette méthode dans un montage macroscopique, pour mesurer la miscibilité et la diffusion mutuelle des liquides et étudier d'autres gradients du chemin optique.

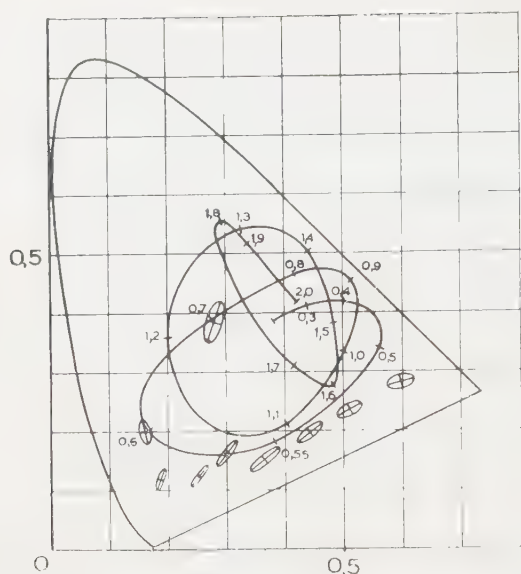


FIG. 1. — Les couleurs de l'échelle de NEWTON, d'après BAUD-WRIGHT [6], et quelques ellipses de discrimination dans la région sensible, d'après MACADAM [8], 10 fois agrandies. Les retards de chemin optique sont donnés en microns sur la courbe.

Dans l'ouvrage cité, la lumière spectralement pure du mercure a été utilisée, et non la lumière blanche, essentiellement parce que la dispersion des détails pour la lumière polarisée était gênante et que, par conséquent, la fidélité d'un équilibrage des couleurs n'était pas satisfaisante.

En développant ces travaux et construisant un « diffusiomètre » ⁽¹⁾ extrêmement simple, pour des liquides très dilués, ces difficultés furent évitées. Nous nous sommes intéressés à la recherche de la précision avec laquelle on peut mesurer un retard du chemin optique comparant les couleurs de deux plages géométriquement semblables, l'une de ces plages formant l'image du spécimen, l'autre constituant une plage de référence. L'intérêt de cette recherche ne doit pas être limité à cet appareil, les conclusions sont générales et la géométrie examinée ici est applicable à beaucoup d'autres appareils interférométriques.

Nous avons étudié particulièrement la teinte sensible du premier ordre et les teintes voisines de celle-ci, c'est-à-dire des couleurs rouges correspondant à une différence de chemin optique de 4 500 Å environ (on suppose l'appareil tel que l'échelle soit à centre noir), la teinte sensible à 5 700 Å et les couleurs bleu-vertâtre à 7 000 Å environ. BAUD et WRIGHT [6] ont calculé les coordonnées trichromatiques et leurs résultats sont donnés sur la figure 1. En principe, on pourrait calculer les limites de discrimination effectives à partir des données fournies par WRIGHT [7] et par MACADAM [8] qui couvrent tout le triangle des couleurs ; sur la figure 1, un certain nombre des ellipses de discrimination trouvées par MACADAM sont tracées.

(1) Pour la mesure de la diffusion d'un liquide dans un autre.

On trouve que, pour le milieu de la teinte sensible à 5 600-5 800 Å environ, la fidélité d'une mise au point des teintes soigneusement faite doit être de 10 Å environ. Pourtant, une étude directe nous a semblé désirable avec un appareil qui fait suivre aux couleurs l'échelle de NEWTON le long de la boucle de la figure 1. Une autre différence entre les mesures citées et les nôtres est que celles-ci étaient effectuées à luminance constante, alors que les teintes de l'échelle de NEWTON changent constamment de luminance. Il semble néanmoins qu'il soit raisonnable de limiter notre étude au domaine de la teinte sensible du premier ordre, parce qu'on voit directement d'après le tracé que les constances sont notablement moins bonnes pour les autres couleurs ; de même, pour la teinte sensible du second ordre où on ne peut prévoir qu'une précision d'un tiers de celle du premier ordre.

Appareil. — L'appareil utilisé, représenté schématiquement sur la figure 2, est la modification d'un dispositif antérieur [5]. La lampe a une température de couleur de 2 800° K. L'objectif O est formé de deux lentilles achromatiques très soigneusement polies, qui font ordinairement les deux parois de la chambre de diffusion. La lentille achromatique L donne l'image d'un plan voisin de O dans le plan objet M d'un microscope dans le champ duquel se trouvent les plages à mesurer. S est la plaque différentielle, constituée par deux plaques de quartz montées comme dans le polariscope de SAVART. Elle est réglable, d'une part autour de l'axe optique, ce qui permet de régler la direction de biréfringence perpendiculairement à la fente d'entrée E, et d'autre part, autour d'un axe horizontal parallèle à la plaque, ce qui permet de choisir avec précision une valeur quelconque de la différence de marche des rayons ordinaires et extraordinaires introduits par la plaque. Les deux polariseurs P₁ et P₂ sont toujours maintenus croisés et sous un angle de 45° par rapport aux axes principaux des lames de quartz. Le quotient de l'intensité pour les polariseurs croisés et parallèles utilisés, est de 9.10⁻³ dans la région bleue et de 1,3.10⁻³ dans le domaine rouge du spectre.

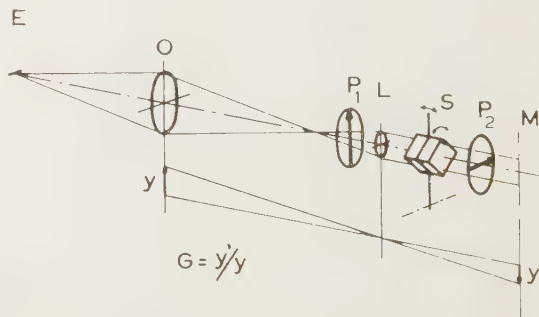


FIG. 2. — Dispositif de mesure : E fente d'entrée ; O lentilles principales ; L lentille formant l'image d'un plan O en M, plan objet d'un microscope ; P₁ et P₂ polariseurs ; S plaque différentielle.

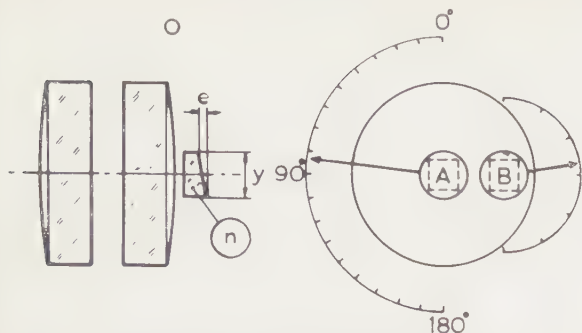


FIG. 3. — Les coins de verre A et B suivant les lentilles O et les échelles circulaires.

Dans le plan indiqué par la lettre O sur la figure 3, on place deux coins de verre A et B, qui doivent servir pour la mise au point des différentes couleurs. La mesure est faite par leur rotation ; le coin A, qui doit être réglé avec précision, est muni d'une échelle divisée en dixièmes de degrés, alors que B, qui doit être orienté dans diverses directions, est muni d'une échelle plus simple.

Si un coin, dont l'angle est e/y (voir fig. 3) et l'indice de réfraction est n , est tourné de l'angle γ par rapport à la position de la figure, où le gradient introduit par la plaque différentielle est maximum, le gradient du chemin optique dans le champ prend la valeur suivante :

$$\Delta = \frac{e}{y} \frac{b}{g} (n - 1) \cos \gamma$$

où b est le déplacement dû à la biréfringence, et g le grossissement (ici inférieur à l'unité, voir fig. 2). En vue de couvrir le domaine à étudier, quelques coins ont été fabriqués, leur pente e/y et indice de réfraction n ont été mesurés. Pour le coin A (coin de mesure), le facteur du deuxième terme de l'équation a une valeur égale à $3\,010 \text{ Å}$. Ceci implique que, partant de la différence de phase réglée avec la plaque S ($\gamma = 90^\circ$), on ajoute ou on soustrait une fraction de ce montant en changeant l'angle ; pour des raisons de précision, on ne peut pas dépasser un écart de 70° de chaque côté.

Pour éviter toute lumière parasite notable, on masque entièrement l'ouverture à O, sauf deux carrés A et B (fig. 3). Il est nécessaire, pour la comparaison des couleurs des champs A et B qu'ils soient limités par une ligne droite ; à cet effet, l'image de B est juxtaposée à celle de A à l'aide d'un coin qui n'est pas visible sur la figure. La perte de lumière par réflexion est compensée par un verre plan de même épaisseur interposé sur le trajet A. Le champ de l'oculaire dans le plan M peut être limité en hauteur, et cette hauteur est choisie de façon qu'elle corresponde aux circonstances des mesures. Les dimensions angulaires des plages A et B sont mises en évidence sur la figure 4. La luminance du champ est $3,0$ nits dans les maxima pour la couleur jaune ; la lumière parasite ne dépasse pas $1/200$ de cette valeur.

Mesures et résultats. — On cherche d'abord, à l'aide de la teinte sensible, la position de la plaque A qui ne produit pas de gradient ($\gamma = 90^\circ$), et l'on introduit sur une partie des lentilles O le coin B qui a une pente plus grande que A. Par rotation de la plaque B on change la couleur du domaine B. Pour chacune de ces positions, on fait 10 mises au point successives de A, égalisant leurs couleurs. Comme mesure de la sensibilité différentielle aux couleurs, on prend la moyenne des écarts de ces positions par rapport à leur moyenne arithmétique. Il est préférable de prendre comme mesure les écarts qui montrent le degré de reproductibilité plutôt que de tenter la mise au point d'une différence de couleur juste perceptible [8]. En général, on prend la valeur moyenne quadratique des écarts [8] conformément à la théorie statistique des erreurs. Cependant, quand il s'agit d'un petit nombre d'observations, il est tout aussi utile de prendre la moyenne simple. Nous avons de même, pour une partie des observations, calculé la moyenne quadratique des écarts, et nous avons trouvé que les résultats sont plus élevés d'environ 35 % étant donné les variations accidentelles.

Les résultats de toutes les valeurs trouvées par deux observateurs sont portés sur la figure 5 (on a pris $h_1 = 30,2$). L'écart moyen des angles est traduit en écart de chemin optique au moyen de l'équation

$$d\Delta = 3\,010 \sin \gamma \, d\gamma$$

Pour fixer l'échelle des Δ , on a cherché le premier minimum des interférences pour la raie $5\,461 \text{ Å}$ du mercure (obtenue à l'aide d'une lampe à mercure suivie d'un monochromateur). La plaque B était réglée de façon qu'on obtint une certaine intensité dans son champ interférentiel, c'est-à-dire que la différence de chemin soit un peu supérieure ou inférieure à $5\,461 \text{ Å}$. Ensuite, on a réglé la plaque A jusqu'à égalité photométrique avec le champ B dans les deux positions possibles : la moyenne de ces positions donne la valeur à l'échelle de A correspondant à la différence de chemin de $5\,461 \text{ Å}$. Le réglage était fait avant et après chaque série de mesures, ce qui permet de contrôler la

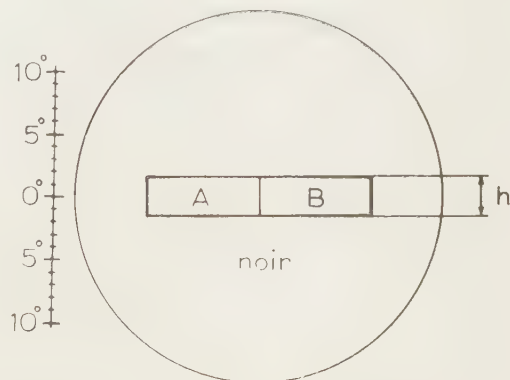


FIG. 4. — Le champ du microscope (la hauteur h est réglable).

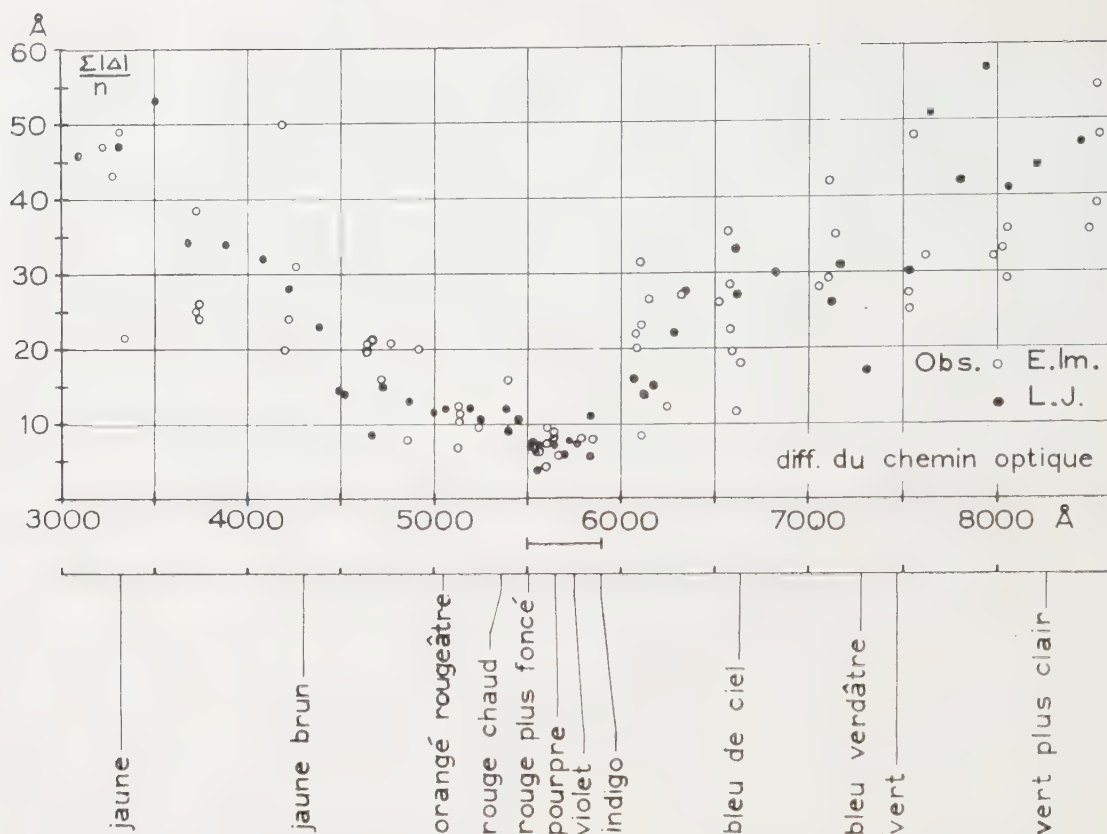


FIG. 5. — Les résultats représentés par l'écart moyen de la valeur moyen arithmétique pour les teintes autour de celle sensible du premier ordre.

stabilité de l'appareil (principalement celle de la plaque S qui est sensible aux changements de l'angle).

Résultats. — Les mesures de la figure 5 ont été répétées plusieurs fois et, comme on le voit, il n'y a pas de variation dans la capacité de discrimination des deux observateurs. Le résultat le plus intéressant est la valeur minimum à la teinte sensible, ayant la valeur de 7 Å environ. En outre, on trouve des valeurs considérablement plus grandes pour les teintes voisines. Pour le rouge à 4 500 Å où la courbe de cette couleur est parallèle à un côté du triangle de couleur, la valeur correspondante est 20 Å, et pour le vert-bleuâtre à 6 500 Å, on a 25 Å environ. La courbe est nettement dissymétrique, de sorte que l'incertitude est plus grande pour les teintes bleu-verdâtre que pour les rouge-jaunâtre, conformément aux conditions connues pour les couleurs pures et pour les zones correspondantes dans le diagramme trichromatique. En avançant de plus en plus au voisinage de la teinte sensible, on met au point aussi sur les intensités et non seulement sur les teintes de ces couleurs peu saturées [6]. Un petit nombre de mesures a été fait sur la teinte sensible du second ordre, l'écart moyen calculé de la même façon étant 30 Å, c'est-à-dire trois fois grand que dans le premier ordre.

Lorsqu'on mesure les coefficients de diffusion mu-

tuelle des liquides, le champ n'est pas tout à fait uniforme en phase, mais on mesure une région correspondant au maximum d'une courbe de GAUSS [5], il est nécessaire de pouvoir limiter le champ de façon que la variation de phase soit négligeable. Pour cela, on a fait des études semblables avec une zone étroite ($h_2 = 0,7$) ce qui correspond à l'extension de la biréfringence propre de la plaque S.

Dans ces conditions, le coefficient de diffusion peut être mesuré avec une bonne précision, en appliquant une petite correction [5]. En comparant les résultats obtenus avec la bande étroite, h_2 , à ceux que l'on obtient avec h_1 pour toutes les valeurs entre 5 500 et 5 900 Å du retard, on trouve une augmentation des valeurs. La moyenne des écarts pour h_1 étant pour un des observateurs, 7,1 Å, a augmenté pour h_2 jusqu'à 10,7 Å, soit à peu près 50 %. A la teinte sensible, l'écart n'excède certainement pas 12 Å pour les zones étroites.

Conclusions. — Les résultats nous autorisent à dire que l'erreur maximum obtenue dans une série de 5 à 10 mesures reste de l'ordre du double de la somme des écarts moyens obtenus ici. Cela indique des précisions de

20 Å pour la teinte sensible,

50 Å pour les teintes voisines mentionnées.

Ces résultats doivent être en bon accord avec ceux que l'on obtient par des mesures soigneuses sur des champs interférométriques de phase uniforme. Si toute l'échelle de NEWTON doit être utilisée dans le domaine des trois premières périodes, on ne peut espérer qu'une précision de 100 à 200 Å quand on estime le retard de chemin optique de l'égalité de deux couleurs, ou quand on essaie de suivre la limite entre deux couleurs voisines, si la phase du champ varie. A notre avis, il est absolument nécessaire d'avoir un champ de référence pour égaliser une couleur; l'estimation « absolue » d'une teinte dépendrait trop des influences subjectives.

Une suggestion très importante est fournie par ces résultats. Si l'on veut effectuer des mesures précises avec ces types d'interférences, on doit essayer d'utiliser la teinte sensible du premier ordre. Pour une autre différence de phase quelconque, cela peut se faire au moyen d'un compensateur convenablement construit. Le compensateur est réglé jusqu'à égalité avec un champ de références contenant la teinte sensible. Avec cette méthode, le compensateur constitue le dispositif de mesure et la mise au point soignée sur la teinte sensible constitue une méthode de zéro.

En ce qui concerne l'appareil actuel, qui mesure les gradients directement, le compensateur est particu-

lièrement simple, parce qu'il a la forme de la plaque tournante A qui est placée devant le gradient dans le champ A à mesurer, dont on lit la position sur une échelle précise. Chaque gradient transformé en différence de phase à l'intérieur de la gamme du compensateur (par exemple jusqu'à 20 000 Å), est donc accessible pour la mesure avec la même limite d'erreur (20 Å). On corrige facilement la différence de dispersion des deux milieux. Cela veut dire que des coefficients de diffusion des solutions extrêmement diluées, sont mesurés avec une précision aussi grande, c'est-à-dire à quelques millièmes près, que celle des méthodes d'interférences ordinaires utilisant une différence de marche de plusieurs longueurs d'onde fournie par les solutions plus concentrées.

RÉFÉRENCES

- [1] Sir Isaac NEWTON, *Optics*, deuxième livre. Londres, 1704.
- [2] F. H. SMITH, Brevet anglais n° 639 014.
- [3] G. NOMARSKI, Brevets français nos 10 59 123 et 10 59 124.
- [4] M. FRANÇON, *Opt. Acta* **1**, 1954, p. 50.
- [5] E. INGELSTAM, *Arkiv Fysik* **9**, 1955, n° 12.
- [6] R. V. BAUD et W. D. WRIGHT, *J. O. S. A.*, **20**, 1930, p. 381.
- [7] W. D. WRIGHT, *Proc. Phys. Soc.*, **53**, part 2, 1941, p. 93.
- [8] D. L. MACADAM, *J. O. S. A.*, **32**, 1942, p. 247.

INFORMATION

Colloque International de spectroscopie

Amsterdam, 14-19 mai 1956

Le sixième Colloquium Speetroscopicum Internationale sera organisé à Amsterdam pendant la semaine qui précède la Pentecôte (14-19 mai 1956) par les soins des Sociétés Royales Néerlandaises de Physique et de Chimie.

De plus amples détails concernant ce colloque, ainsi que les formulaires d'inscription ne seront envoyés qu'à ceux qui, en communiquant leur nom et leur adresse au Bureau du Colloque, auront manifesté leur intérêt à cette réunion.

Le Colloque traitera de la spectroscopie d'émission, de la spectroscopie d'absorption, principalement en vue de l'application à l'analyse.

Les personnes qui désireraient présenter une communication doivent se faire connaître le plus tôt possible.

Pour tous renseignements, s'adresser au

Prof. Dr F. FRESSE, Secrétaire de la Commission du Colloque International de Spectroscopie.

Laboratorium voor Analytische Chemie, Nieuwe Achtergracht 25, Amsterdam C4.

Plan de la réunion. — 1. **Spectroscopie d'émission :**

a) la photométrie de la flamme. b) l'arc électrique. c) l'étincelle. d) la quantométrie. e) l'instrumentation.

— II. **Spectroscopie d'absorption :** f) la spectroscopie infrarouge et la spectroscopie RAMAN. g) la spectroscopie ultraviolette et la spectroscopie de fluorescence.

Application of the binocular matching method to the study of the subjective appearance of surface colours

Elaine G. T. WASSEF

Institute of Education for Girls, Ibrahim University, Cairo, Egypt.*

SUMMARY. — A binocular matching technique has been developed for application in studies of the effects of visual adaptation on the appearance of surface colours.

The assumptions underlying the technique were considered. A factorial experiment was designed to examine the relative importance of the influences of changing the illuminant and the background on the hue of some red, green and purple samples of different levels of value and chroma, and to assess the interactions of these factors. Statistical analysis of the data showed that the standard error of a single match was about two hue steps; and that it was possible, without repeating any matches, to evaluate the influences of the above mentioned factors within close tolerances.

SOMMAIRE. — Une méthode de comparaison binoculaire a été mise au point pour l'application aux études de l'effet de l'adaptation visuelle sur l'apparence des couleurs de surface.

Les hypothèses sur lesquelles est basée la technique expérimentale ont été étudiées. Une expérience a été conçue pour déterminer les importances relatives des changements d'éclairage ou de fond sur la teinte de quelques échantillons rouge, vert et pourpre de différentes saturations ou couleurs, ainsi que pour déterminer les interactions entre ces facteurs. L'analyse statistique des résultats a montré que l'erreur moyenne d'un équilibrage était de l'ordre de deux échelons de couleur et qu'il est possible, sans répéter aucun équilibrage d'évaluer les influences des facteurs ci-dessus avec une bonne précision.

ZUSAMMENFASSUNG. — Eine binokulare Vergleichsmethode wird entwickelt und auf die Untersuchung angewendet, welchen Einfluss die visuelle Adaptation auf die Erkennbarkeit von Oberflächenfarben hat. Die Voraussetzungen, auf denen sich diese Methode aufbaut, werden geprüft. Ein besonderer Versuch zeigt die relative Bedeutung von Änderungen der Helligkeit und des Hintergrundes auf die Schattierung einiger roter, grüner und purpurfarbenen Proben verschiedener Wertstufen und Farben. Man kann die Wechselwirkungen dieser Einflüsse abschätzen. Eine statistische Analyse der Ergebnisse zeigt, dass der mittlere Fehler eines einzelnen Vergleichs ungefähr zwei Farbstufen beträgt. Es ist möglich, ohne Wiederholung der Vergleiche die Einflüsse der erwähnten Faktoren innerhalb enger Grenzen zu ermitteln.

1. Introduction. — The efficiency of the binocular-matching method as a tool of investigation in vision was established by WRIGHT [1] in 1934, but its application to the study of the appearance of surface colours seems to have been first attempted by BOUMA and KRUTHOFF [2] in 1943. The method has the advantage of yielding more consistent observations than the memory-matching methods which have been widely used in this field [3, 4, 5]. That experimenters have not made much use of the binocular method may be due to the feeling that memory matching is the natural way of recognizing colour changes in everyday life. It is also possible that opinion was influenced by BOUMA & KRUTHOFF'S [2] own conclusion that the binocular method could not replace the memory method in view of the discrepancies between the results which they obtained by the two methods. In the writer's opinion the discrepancies recorded by BOUMA and KRUTHOFF are of doubtful significance since the comparison was made between the data after the memory observations had been smoothed by means of the moving-average formula which, according to KENDALL [7], may generate trends of no physical origin.

The work described in this paper was an attempt to re-assess the power of the binocular method in connection with studies of the subjective appearance

of surface colours. For this purpose a binocular viewer was constructed, and the experiment was planned and analysed according to modern statistical views.

2. Preliminary tests. — The following observations were made on WRIGHT's colorimeter [8] to test (a) the possible effect of the state of adaptation of one eye on colour appraisal by the other eye, and (b) whether the observer's eyes differed in their colour perception.

Test (a) : The relative luminous-efficiency values of the right eye were measured for a number of wavelengths when the left eye was dark adapted in one case and light adapted in the other. The values were smaller in the latter case, but the differences did not reach the 5 per cent significance level except at a few wavelengths. Nevertheless, the combination-of-probabilities test substantiated the indication of the persistent sign that the state of adaptation of one eye had an effect on the other eye. While this agreed with the conclusion of AGUILAR and SOLIS [9], it showed that the effect was not large enough to influence the results drawn from observations with the binocular viewer.

Test (b) : Each eye saw a separate field illuminated by a monochromatic radiation drawn from an independent spectrum. The recorded differences between the wavelengths of the illuminating radiations when the two fields were matched indicated the presence of small differences in the colour perceptions of the two

* Formerly, Technical Optics Section, Imperial College, London.

eyes. The precaution was therefore taken to match each reference sample once with the left eye and once with the right eye.

3. Apparatus and observational procedure. — The binocular viewer (fig. 1) consisted of two adjacent

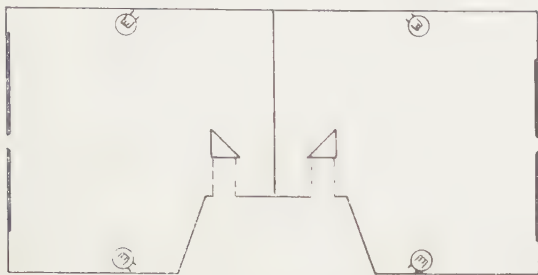


FIG. 1. — Binocular Viewer (not to scale)

compartments approximately $36'' \times 36'' \times 36''$ each, separated by a light-tight partition. The inside of the two compartments was painted black. Each compartment was illuminated by two pairs of lamps fixed in directions making angles of 45° at the centre of the side wall where the sample was to be placed. The lamps gave a fairly uniform illumination over the size of the field used in the experiment. The light reflected from each sample and background entered a right-angle prism where it was reflected through 90° and passed through two openings in the front face of the viewing box. The distance between the openings was adjustable to suit the observer's interocular distance. The symmetrical design of the compartments made it easy to interchange the samples and conditions of viewing.

The lamps used in the experiment were gas-filled incandescent pearl lamps matched to a standard lamp calibrated at the *National Physical Laboratory* to give the colour temperature of the CIE Standard Illuminant A (about 2850° K). Illuminants B and C were obtained from combinations of the standardized lamps and "Chance OB9" glass filters. The colour temperature of the lamps was checked after using them for thirty hours, but very slight changes were found.

Colour samples from the 1950 edition of the MUNSSELL Atlas were used throughout the investigation. It contained forty charts of constant hue, at intervals of $2 \frac{1}{2}$ hue steps (The hue circle is divided into 100 steps starting from and ending at red). Each chart contained samples of the same hue at intervals of one step in value (1, 2, ..., 9) and two steps in chroma (0, 2, 4, ...). Some samples of chroma 1 and 3 were also available in the ten major hues.

The observer sat in a dark room and adjusted the distance between the openings in the front wall of the viewer to suit his interocular distance. Each eye then viewed a field subtending an angle of $22^\circ \times 17^\circ$ with an opening of $1^\circ \times 1^\circ 20'$ in the middle of the field. A final adjustment of the separation between the two

fields was made by small angular rotations of the prisms to avoid fusing the fields.

Each session of observations was preceded by a period of five minutes light adaptation of the eyes to the conditions in the respective compartments. The reference sample was then pressed against the wall of one of the compartments on the small opening to reduce the shadow due to the space between the background and the sample. To make the match the operator presented to the observer in the other compartment a MUNSSELL sample from the Atlas charts of constant hue. The observer was asked to compare it with the reference sample viewed by the other eye, and if it did not match he would ask for a lower or higher value or chroma or a specific change of hue. It was found that an attempt to find an approximate match of value and chroma from the first chart usually facilitated judgment of the required change of hue. If the required match was not found among the samples, it was estimated by interpolation in all three attributes. In some cases, however, extrapolation was inevitable. After the observer had decided on the match, the operator recorded it in terms of the Munsell notation. Another reference sample was then presented to the observer and the process of matching repeated. About ten reference samples were matched in each sitting. The samples were presented in a random succession, and it was also observed that no match was repeated in the same sitting. Sometimes two sittings were made in one day.

It is important to note that the observer could not fixate on both fields at the same time, i. e. the method was not of simultaneous comparison. It was in fact a very quick memory matching where the standard was always available for comparison. To avoid adaptation effects due to the samples themselves the observer did not look at either for any length of time, and the samples were not left in the openings during the five-minute adaptation periods.

4. Design of the experiment. — The appearance of a surface colour depends essentially on two factors: the light reflected from the sample, which is physically measurable, and the state of adaptation of the eye. Earlier work on adaptation using aperture colours [8, 11, 12] and surface colours [2, 3, 4, 5, 10] showed that the state of adaptation of the eye depends on several factors: the type and intensity of the adapting radiation, reflectance and type of objects in the field of view (i. e. the background), and the size and type of the adapting field. The duration of the exposure of the eye to the adapting radiation and test field also affects its state of adaptation. The response to these factors may differ from one person to another. Furthermore, their effects are not necessarily independent. For example, the influence of changing the illuminant on the appearance of the sample depends on the reflectance of the background. Such a phenomenon is referred to as an interaction between factors, in this case between the effect of the illuminant

TABLE 1

Matches with white background

		Left eye matches						Right eye matches					
		A		C		B		A		C		B	
5.0 R	3/2	4 YR	3.8/2.5	9 R	3.8/3	5 YR	3.5/3	5 YR	4/2	6 R	3.8/2	9 RP	4/1.5
	3/4	10 R	3.5/4	6.5 R	3/6.5	8.5 R	3.5/6	10 R	3.8/4	5 R	3.5/6	6 R	4.5/5
	3/6	10 R	3.5/8	6 R	4/8	6 R	4/8	6 R	4/5	5 R	4.5/7	2.5 R	4/6
	5/2	3.5 YR	5.5/2	7.5 R	6/3	2.5 YR	5/3	10 R	5.2/3	7.5 R	6/3	6.5 R	6/2
	5/4	1.5 YR	5/7	7.5 R	5.5/7	7.5 R	5.5/7	9 R	5.5/4.5	2.5 R	5.5/6	6 R	5.5/6
	5/6	10 R	5/8	5.5 R	6/11	6 R	5.5/10	7.5 R	5.2/7	2.5 R	5/10	1.5 R	5.7/10
	7/2	10 R	8/2	9 R	7.2/3	9 R	7.8/2.5	9 R	8/3	10 R	8/3.5	1 R	8/5
	7/4	6 R	7.5/7	6.5 R	8/7.5	6 R	7.2/7	10 R	7.5/5	10 RP	7.2/8	3.5 R	7.5/8
	7/6	7.5 R	7/7	6 R	7.5/9	6 R	7.5/10	10 R	7.2/6	2.5 R	7.2/8.5	4 R	8/8
5.0 G	5/2	2.5 G	5.5/3	3.5 G	6.5/2	4 G	5.2/3	6 G	5.5/2.5	7.5 G	6/3	9 G	5.8/2
	5/4	1.5 G	5.5/6	7.5 G	5/5.5	3.5 G	5.8/6	3.5 G	5.8/5	10 G	5.5/4	10 G	5.5/4
	5/6	3.5 G	5.8/8	7.5 G	5/7	6 G	6/8	2.5 G	6.2/5	8 G	5.5/6	9 G	6/4
	7/2	2.5 G	8.5/5	5 G	7.8/2	5 G	7.8/3	2.5 G	8.5/4	2.5 BG	7.8/2.5	7.5 G	7.8/2
	7/4	3.5 G	8/7	6 G	7.8/6	5 G	7.8/6	4 G	8/5	7.5 G	7.5/5	6.5 G	8/4
	7/6	2.5 G	7.5/8	6 G	7.8/7	7.5 G	7/8	5 G	8/6	7.5 G	7.2/6	10 G	7/5
5.0 P	3/2	5 P	3.5/1	6 RP	3.8/1	5 YR	3/2	2.5 P	4/1.5	5 P	3.8/2	8.5 P	3.5/2
	3/4	7.5 P	3.5/3.5	6.5 RP	3/4	6 RP	3.2/3	2.5 P	4/2	10 P	3.5/4	10 P	3.5/3
	3/6	6 P	3.5/6	3.5 RP	3.5/6	4 R	3/4.5	2 P	3.5/4	2.5 RP	3.5/4	9 P	4/4
	5/2	1.5 P	5.5/1	5 RP	6/1.5	5 RP	5.2/1.5	1.5 P	5.5/2	7.5 P	6/2	7.5 P	6/1
	5/4	5 P	5.5/4	4 RP	5/4	6 RP	5/3	3.5 P	5.5/3.5	10 P	5.8/3.5	9 P	6/3
	5/6	5 P	5.5/6	10 RP	5/5	5 RP	5/5	4 P	5.2/6	10 P	5/5	1 RP	5/4.5
	7/2	5 P	8.5/1.5	9 P	8/2	6 RP	7.5/2	1.5 P	8/3	8.5 P	8/2	6 P	8/2
	7/4	5 P	8/5	3.5 RP	8/5	5 RP	7.2/5	6 P	8/4	10 P	7.5/6	1 RP	7.5/6
	7/6	7.5 P	6.8/6	6 RP	7/9	2.5 RP	7/9	9 P	6.8/7	9 P	5.5/6	9 P	7.5/7

TABLE 1 (contd.)

Matches with black background

		Left eye matches						Right eye matches					
		A		C		B		A		C		B	
5.0 R	3/2	4 RP	4.5/5	6 R	4/4	5 R	4/4	8.5 RP	4/4	6 R	3.8/4	6 R	3.8/4
	3/4	1.5 R	4/7	6 R	4.5/8	5 R	4/7	2.5 R	4.2/6	4 R	4/9	4 R	4.5/6.5
	3/6	4 R	4.2/10	5.5 R	4/10	4 R	4.2/9	1.5 R	3.5/8	4 R	4/9	4 R	4/9
	5/2	7.5 P	6.5/5	8.5 R	6/5	3.5 R	6/6	10 P	5.8/4	6.5 R	6/5.5	4 R	6/5
	5/4	3.5 RP	5.5/10	6.5 R	5.5/9	6 R	5.5/7	7.5 RP	5.5/6	6.5 R	5/7	3 R	6/10
	5/6	7.5 RP	5/12	6 R	5.2/10	5 R	5.5/10	7.5 RP	5.5/10	6 R	5/10	6.5 R	5/8
	7/2	7.5 P	8/6	10 R	8/8	2.5 R	8/10	9 P	7.2/8	7.5 R	7.2/7	6 R	7.5/5
	7/4	2.5 RP	7/12	7.5 R	7.2/10	6 R	7.2/10	10 P	7/8	6 R	7/9	3 R	7/10
	7/6	1.5 RP	7/12	8.5 R	7.2/10	5 R	8/10	2.5 RP	6.5/8	6.5 R	7/10	2.5 R	7/10
5.0 G	5/2	3.5 B	6/3	1.5 G	8/1.5	8.5 G	6.2/2	10 BG	5.5/2	7 GY	5.5/2.5	6 G	6.2/2
	5/4	4 BG	5.8/6	6 G	5.8/3.5	7.5 G	5.5/4	1.5 BG	5.5/4	3 G	6/4	5 G	6/3
	5/6	4 B	5.5/7	6 G	5.8/5	10 G	5.8/6	6 G	5.5/5.5	5 G	5/7	5.5 G	6/5.5
	7/2	10 R	8/6	2.5 G	9/3	4 G	9/3	2.5 B	7.5/4	10 GY	8/2	10 GY	8/3
	7/4	3.5 B	7.2/8	5 G	8.5/6	5 G	7.5/6	8.5 B	7/4.5	4 G	7.8/4.5	5 G	8/5
	7/6	7.5 B	7/8	4 G	9/8	9 G	7.5/8	7.5 BG	6.5/6	5 G	7.5/5	5.5 G	8/6
5.0 P	3/2	5 P	5/4	6.5 R	4/2	10 RP	3.8/2	8.5 P	3.5/2	2.5 R	4/2	1 RP	4/3
	3/4	4 P	4.8/9	10 RP	4/5	5 RP	4/5	5 P	3.5/6	8.5 RP	3.8/6	2.5 RP	4/5
	3/6	5 P	4.8/9	8.5 RP	4/6	4 RP	3.8/6	4 P	4/9	5 RP	3.8/7	1.5 RP	3.8/5.5
	5/2	1.5 P	6.2/6	7.5 R	7/4	6 RP	7/6	5 P	5.8/4	7.5 R	5.5/3	3.5 RP	6/3
	5/4	3.5 P	6.2/9	10 RP	6.2/5	5 RP	6/5	4 P	5.5/5	3.5 R	5.8/6	2.5 RP	6/5
	5/6	5 P	6/10	1 R	6/7	4 RP	6/6	5 P	5.5/7	6.5 RP	6/8	2.5 RP	5.2/6
	7/2	4 P	8/6	6.5 R	8/5	6.5 R	8/6	2 P	7/6	2.5 R	7.2/7	2.5 RP	7.8/5
	7/4	2.5 P	7/10	3.5 R	7.2/7	9 RP	8/7	2.5 P	4/6	4 R	7/6	1.5 RP	8/8
	7/6	5 P	7/9	10 RP	8/10	2.5 RP	7.5/10	4 P	7/8	10 RP	7/9	1.5 RP	7/8

and the effect of background. As the possibility of such mutual dependence cannot be ruled out it becomes imperative to study the possible interactions as well as the general effects of the factors. Since a detailed study of each factor in this way would require a large amount of experimentation, it was thought necessary in the first place to sort out the more important factors and interactions by means of an experiment planned according to the factorial scheme which has proved to be very efficient in similar types of problems in other fields of research.

The factors covered by the experiment were : (1) the type of illuminant, by experimenting on illuminants A, B and C, at approximately 10 lumens per square foot, and (2) the reflectance of the background by using a white and a black background. Similar backgrounds were used for the reference and matching samples. The reference samples were always illuminated by illuminant A, and it was found practically more convenient to maintain its level of illumination at approximately 36 lumens per square foot.

In view of the slight difference in the colour perception of the observer's eyes (Section 2) all the matches were repeated after interchanging the viewing conditions in the two compartments of the viewer. The difference between the eyes was treated as a separate factor when analysing the data.

The three major hues 5.0 R, 5.0 G and 5.0 P of the MUNSSELL Colour Atlas were experimented upon. Nine samples from each of the red and the purple hues, and six samples from the green were observed, corresponding to the nine different combinations of the chromas /2, /4, /6 and the values 3/, 5/ and 7/ with the exception of values 3/ in the green because the sample 5.0 G 3/6 was not available. This choice made it possible to investigate the influence of the various illuminant-background combinations on, say, the hue at various levels of value and chroma.

288 matches were made, but no match was repeated under the same conditions of viewing except for occasional checks on the consistency of the observations.

5. Statistical significance of the factors. — The matches are listed in Table 1. The analysis was confined to the changes of hue. The hue shift, which is the hue of the matching sample minus the hue of the standard sample, is tabulated in Table 2 in terms of MUNSSELL steps of hue.

A few general trends are discernible in Table 2, but specific results can be obtained only by statistical analysis of the data. The method of the analysis of variance was therefore applied to investigate the variation pertaining to each hue and background. The purpose of the analysis was to determine the relative importance of the factors : illuminant, chroma, value and the eye-effect ; and at the same time to assess their interactions and to estimate with precision the error of a single match which is a criterion of the reproducibility of results obtained by binocular match-

ing. In the light of this analysis we shall evaluate the confidence limits of the matching hues.

The hypothesis of colour constancy served well as the null-hypothesis of the analysis of variance. If it

TABLE 2 (a)

Difference, in MUNSSELL hue steps, between the hue of the matching sample, seen by the *left* eye against the *white* background, and the hue of the standard sample seen by the right eye against an identical background.

	Illuminant A			Illuminant C			Illuminant B		
	R	G	P	R	G	P	R	G	P
3/2	9.0		0	4.0		11.0	10.0		30.0
3/4	5.0		2.5	0		11.5	3.5		11.0
3/6	5.0		1.0	1.0		8.5	1.0		19.0
5/2	8.5	-2.5	-3.5	2.5	-1.5	10.0	7.5	-1.0	10.0
5/4	6.5	-3.5	0	2.5	2.5	9.0	2.5	-1.5	11.0
5/6	5.0	-1.5	0	0.5	2.5	15.0	1.0	1.0	10.0
7/2	5.0	-2.5	0	4.0	0	4.0	4.0	0	11.0
7/4	1.0	-1.5	0	1.5	1.0	8.5	1.0	0	10.0
7/6	2.5	-2.5	2.5	1.0	1.0	11.0	1.0	2.5	7.5

TABLE 2 (b)

Difference, in MUNSSELL hue steps, between the hue of the matching sample, seen by the *right* eye against the *white* background, and the hue of the standard sample seen by the left eye against an identical background.

	Illuminant A			Illuminant C			Illuminant B		
	R	G	P	R	G	P	R	G	P
3/2	10.0		-2.5	1.0		0	-6.0		3.5
3/4	5.0		-2.5	0		5.0	1.0		5.0
3/6	4.0		-3.0	0		7.5	-2.5		4.0
5/2	5.0	1.0	-3.5	2.5	2.5	2.5	1.5	4.0	2.5
5/4	4.0	-1.5	-1.5	-2.5	5.0	5.0	1.0	5.0	4.0
5/6	2.5	-2.5	-1.0	-2.5	3.0	5.0	-3.5	4.0	6.0
7/2	4.0	-2.5	-3.5	5.0	7.5	3.5	-4.0	2.5	1.0
7/4	5.0	-1.0	1.0	-5.0	2.5	5.0	-1.5	1.5	6.0
7/6	5.0	0	3.0	-2.5	2.5	4.0	-1.0	5.0	4.0

TABLE 2 (c)

Difference, in MUNSSELL hue steps, between the hue of the matching sample, seen by the *left* eye against the *black* background, and the hue of the standard sample seen by the right eye against an identical background.

	Illuminant A			Illuminant C			Illuminant B		
	R	G	P	R	G	P	R	G	P
3/2	-11.0		0	1.0		21.5	0		15.0
3/4	-3.5		-1.0	1.0		15.0	0		10.0
3/6	-1.0		0	0.5		13.5	-1.0		9.0
5/2	-17.5	18.5	-3.5	3.5	-3.5	22.5	-1.5	3.5	11.0
5/4	-11.5	9.0	-1.5	1.5	1.0	15.0	1.0	2.5	10.0
5/6	-7.5	9.0	0	1.0	1.0	16.0	0	5.0	9.0
7/2	-17.5	25.0	-1.0	5.0	-2.5	21.5	-2.5	-1.0	21.5
7/4	-12.5	18.5	-2.5	2.5	0	18.5	1.0	0	14.0
7/6	-13.5	22.5	0	13.5	-1.0	15.0	0	4.0	7.5

TABLE 2 (d)

Difference, in MUNSELL hue steps, between the hue of the matching sample, seen by the *right* eye against the *black* background, and the hue of the standard sample seen by the *left* eye against an identical background.

	Illuminant A			Illuminant C			Illuminant B		
	R	G	P	R	G	P	R	G	P
3/2	—	6.5		3.5	1.0		17.5	1.0	6.0
3/4	—	2.5		0	—1.0		13.5	—1.0	7.5
3/6	—	3.5		—1.0			10.0	—1.0	6.5
5/2	—15.0	15.0	0	1.5	—3.0	22.5	—1.0	1.0	8.5
5/4	—7.5	6.5	—1.0	1.5	—2.0	18.5	—2.0	0	7.5
5/6	—7.5	1.0	0	1.0	0	11.5	1.5	0.5	7.5
7/2	—16.0	17.5	—3.0	2.5	—5.0	17.5	1.0	—5.0	7.5
7/4	—15.0	13.5	—2.5	1.0	—1.0	19.0	—2.0	0	6.5
7/6	—12.5	12.5	—1.0	1.0	0	15.0	—2.5	0.5	6.5

were true all the hue shifts would be nil within the limits of experimental error. The analytical procedure of the analysis of variance is to split up the sum of the squares of the deviations of each shift from the mean of all the shifts into (a) components corresponding to the factors which cause (or are suspected to cause) variation, (b) other components corresponding to the interactions of these factors and (c) a residual from which the experimental error can be estimated. Each sum of squares is divided by the respective number of degrees of freedom, and the quotient is the "mean square". When the mean square corresponding to an interaction proves to be significantly larger than the mean square of the experimental error the inference is that the influences of these factors are not independent, i. e. the effect of one factor depends on the level of the other factor. When a factor has a general effect, i. e. when its influence appears at all the levels of the other factors, its mean square is expected to be significantly larger than the mean square corresponding to its interaction with them. The standard experimental error is the square root of the mean square of the residual and has its number of degrees of freedom.

The analysis of variance of the data was carried out along the lines sketched above, the computing scheme being as described by BROWNLEE [13]. The details of the calculations are omitted, and an example of the analysis is given in Table 3 where the letters I, C, V, and E stand respectively for the influences of illuminant, chroma, value and the difference between the estimations of the shift by the two eyes. FISHER's z-test was applied to each mean square, and the resulting levels of significance are indicated in Table 4 by one, two or three crosses depending on whether the level of significance is 5 per cent, 1 per cent or 0.1 per cent, respectively.

The persistent significance of the EI interaction indicates that the effect of the difference between the colour perceptions of the eyes changed from one illuminant to the other. Since neither EV nor EC was significant one infers that the eye-effect did not de-

pend on the value or the chroma of the observed sample — within the ranges covered by the experiment (1).

The significance of the interactions IC and IV in the larger proportion of the investigated viewing conditions shows that the hue shifts associated with the change of illuminant (A, B or C) varied with the chroma and the value of the sample. The fluctuations of the

TABLE 3

Analysis of Variance of the Hue Shifts of the Red Samples

Source of Variation	d. f.	Sum of Squares		Mean Squares	
		Black	White	Black	White
E	1	.46	92.04	.46	92.04
I	2	1 384.62	221.36	692.31	110.68
V	2	64.12	18.69	32.06	9.34
C	2	27.37	95.44	13.68	47.72
E × I	2	12.40	53.08	6.20	26.54
E × V	2	3.79	4.86	1.90	2.43
E × C	2	9.59	12.11	4.80	6.06
I × V	4	253.66	12.03	63.42	3.01
I × C	4	116.07	13.36	29.02	3.34
V × C	4	10.32	11.11	2.58	2.78
Residual	28	47.08	147.29	1.68	5.26
Total	53	1 929.48	681.37		

TABLE 4

Significance Levels of the Effects

Source of Variation	Red Samples		Green Samples		Purple Samples	
	Black	White	Black	White	Black	White
E	—	—	—	—	—	—
I	?	—	—	—	+	—
V	—	—	—	—	—	—
C	—	+++	—	—	—	—
E × I	+	++	+	+	++	++
E × V	—	—	—	—	—	+
E × C	—	—	—	—	—	—
I × V	+++	—	+++	—	—	+
I × C	+++	—	+++	++	++	—
V × C	—	—	—	—	—	—
Mean Square	1.97		4.09		5.35	
Error		4.56		1.92		9.60

(1) In fact EV was significant on the 5 per cent level once — possibly a chance effect,

shifts with the factors V and C, as well as with E, were in fact so large that the change of illuminant did not demonstrate a significant general effect except for purple and possibly red samples with a black background. The dependence of the effect of changing the illuminant with the chroma of the sample was more pronounced than its variation with the value.

6. Numerical evaluation of the effects. — In the light of the above discussion of the statistical significance of the factors and their interactions the ranges (of hue) within which the matches should be expected to lie can be calculated.

In each case three quantities were calculated: the mean value of the shift, the standard error of this mean and its 95 per cent confidence limits. In general the average of the matches observed by the two eyes was taken as the match which would have been found under the normal conditions of binocular viewing. Also, in the cases where the hue shifts did not vary significantly with the level of a factor the mean of the shifts recorded at the various levels of this factor gave the most probable estimate of the shift. Advantage was thus taken of the presence of insignificant effects to increase the precision of assessing the more influential factors.

Consider for example the red samples against a white background. In this case V and its interactions were not significant. The mean of the shifts recorded at the three levels of the value were therefore used. Taking, in addition, the mean of the matches observed by the two eyes the relative data could be condensed and are given in the following table where each item is the mean of six measurements of the hue shift.

	A	B	C
/2	6.9	2.2	3.2
/4	4.4	1.2	— .6
/6	4.0	— .7	— .4

The standard deviation of a single observation is 2.14 hue step (from Table 4). Hence the standard deviation of each item in the table is $2.14/(6)^{\frac{1}{2}} = .87$ hue step. The value of Student's *t*-statistic for 5 degrees of freedom (number of observations minus 1) at the 95 per cent probability level is 2.0. Hence the 95 per cent confidence limits of each item is equal to the mean $\pm .87 \times 2.0$. It follows that when the 5.0 R samples of chroma 2 are matched under illuminant C we should expect that 95 per cent of the matches will have their hues within the range $5.0 R + 3.2 \pm 1.74 = 8.2R \pm 1.74$.

The matches made with the two backgrounds were treated in this way with the following results:

(a) *Case of white background.* — The confidence limits of the hues of the matching samples when matching is carried out against a white background are given in Table 5.

An examination of this table shows that:

(1) There were no significant differences between

TABLE 5

95 % Confidence limits of the hues of the matching samples in the case of the white background /based on the means of sets of six observations in the cases of the red and the purple samples, and on sets of four observations in the case of the green samples).

		A		B		C	
5.0 R	/2	1.9 YR	± 2.2	7.2 R	± 2.2	8.2 R	± 2.2
	/4	9.4 R	± 2.2	6.2 R	± 2.2	4.4 R	± 2.2
	/6	9.0 R	± 2.2	4.3 R	± 2.2	4.6 R	± 2.2
5.0 G	/2	3.4 G	± 2.2	6.4 G	± 2.2	7.1 G	± 2.2
	/4	3.1 G	± 2.2	6.2 G	± 2.2	7.7 G	± 2.2
	/6	3.4 G	± 2.2	8.1 G	± 2.2	7.2 G	± 2.2
5.0 P	3/	4.2 P	± 3.2	7.1 RP	± 3.2	2.2 RP	± 3.2
	5/	3.4 P*	± 3.2	2.2 RP	± 3.2	2.8 RP	± 3.2
	7/	5.5 P	± 3.2	1.6 RP	± 3.2	1.0 RP	± 3.2

the appearance of colours under illuminant B and their appearance under illuminant C.

(2) The influence on hue of changing the level of illumination (which was exemplified in this experiment by matching under illuminant A of lower level of illumination) differed considerably from one hue to the other. The hue shifts were large in the case of red samples, smaller for green samples and insignificant in the case of purple samples.

(3) The appearance of colours under the illuminants B and C differed significantly from their appearance under A; red and green samples looked more yellowish under B or C, while purple samples looked bluish.

(b) *Case of black background.* — In view of the large number of significant factors and interactions in the cases of the red and the green samples the original data could be condensed only in as far as taking the means of observations made by both eyes. The means of the matching hues are given in Table 6 for all three colours. The 95 per cent confidence limits, based on six observations, are given in the case of the purple samples where V and its interactions were not significant.

Comparison of Table 5 and Table 6 shows that:

(a) The changes in the appearance of colours are in most cases greater when viewed against a black background than when the background is white. This may be explained by the greater influence of adaptation in the latter case due to the larger amount of light reflected by the background which reduces the effects of the colour rendering properties of the illuminant.

(b) Only in the case of black background have significant differences appeared between the hue shifts observed under illuminants B and C the spectral distributions of which are very close.

(c) In some of the cases the change of background reversed the direction of hue shifts.

7. Conclusions. — The preceding experiment demonstrates the efficiency of binocular matching for

TABLE 6
Mean of the matching hues in the case of the black background

		A			B			C		
		3/	5/	7/	3/	5/	7/	3/	5/	7/
5.0 R	/2	6.2 RP	8.8 P	8.2 P	5.5 R	3.8 R	4.2 R	6.0 R	7.5 R	8.8 R
	/4	2.0 R	5.5 RP	1.2 RP	4.5 R	4.5 R	4.5 R	5.0 R	6.5 R	6.8 R
	/6	2.8 R	7.5 RP	2.0 RP	4.0 R	5.8 R	3.8 R	4.8 R	6.0 R	7.5 R
5.0 G	/2	—	1.8 B	6.2 B	—	7.2 G	2.0 G	—	9.2 GY	1.2 G
	/4	—	2.8 BG	1.0 B	—	6.2 G	5.0 G	—	4.5 G	4.5 G
	/6	—	10.0 G	2.5 B	—	7.8 G	7.2 G	—	5.5 G	4.5 G
5.0 P	/2		4.3 P \pm 2.4			6.6 RP \pm 2.4			5.5 R \pm 2.4	
	/4		3.6 P \pm 2.4			4.2 RP \pm 2.4			1.6 R \pm 2.4	
	/6		4.7 P \pm 2.4			2.7 RP \pm 2.4			8.5 RP \pm 2.4	

studying of the influences of adaptation of surface colours. The standard error of a single match was about two hue steps. The influence of small differences in the colour perception of the two eyes can be overcome by repeating the matching with the other eye. This repetition should also reduce the effect of observational errors by about 30 per cent.

The experiment also provides evidence of the power of the statistical approach to experimental work in this field. The value of designing and analysing colour experiments according to the factorial scheme can be readily assessed from the experiment: With less than three hundred matches it was possible to sort out the contribution of six factors and eighteen important interactions, and to evaluate the influences of several factors with standard errors less than one hue step. Where interactions were involved the estimation of the influences of the interacting factors was inevitably less accurate; but these interactions would not have been discovered had the experiment been otherwise designed.

The numerical results given above also serve to indicate the number of repetitions which would be required to reach a specified degree of precision in detailed experimentation with surface colours to help resolve some of the intricate problems of colour vision.

Acknowledgment. — The binocular viewer was constructed and the observations were made by the writer at Imperial College, London, in the course of

research undertaken under the guidance of Prof. WRIGHT. The author wishes to express her gratitude to Prof. WRIGHT for his encouragement and invaluable advice, and for reading the manuscript of this paper.

I also thank my husband, Dr A. M. WASSEF, for recording the observations, and for suggestions on statistical matters.

REFERENCES

- [1] W. D. WRIGHT, *Proc. Roy. Soc. B.*, **49**, 1934, p. 115.
- [2] P. J. BOUMA & A. A. KRUTHOFF, *Physica*, **10**, 1943.
- [3] H. HELSON, *J. Exp. Psych.*, **23**, 1938, p. 439.
H. HELSON & V. B. JEFFERS, *J. Exp. Psych.*, 26-1940.
H. HELSON & J. GROVE, *J. O. S. A.*, **37**, 1947, p. 387.
H. HELSON & D. B. JUDD & M. H. WARREN, *Ill. Eng.* (April, 1952).
- [4] D. B. JUDD, *J. O. S. A.*, **30**, 1940, p. 2.
- [5] P. J. BOUMA & A. A. KRUTHOFF, *Phillips Technical Review* **9**, 1947, p. 2.
- [6] E. G. TADROS, *Ph. D. Thesis*, University of London, 1952.
- [7] M. G. KENDALL, *The Advanced Theory of Statistics*. Griffin & Co Ltd., London (1948).
- [8] W. D. WRIGHT, *Researches on Normal and Defective Colour Vision*. Henry Kempton, London (1946).
- [9] M. AGUILAR & M. SOLIS, *Anal. R. Soc. Espan. Fis. Quim. A.*, **47**, Nos 11-12, 1951.
- [10] G. T. WINCH & B. M. YOUNG, *G. E. C. Journal*, **18**, 2, 1951.
- [11] R. W. G. HUNT, *Proc. Phys. Soc. B.*, **62**, 1949, p. 203.
R. W. G. HUNT, *J. O. S. A.*, **43**, 1953, p. 479.
- [12] F. H. G. PITT, *Proc. Phys. Soc.*, **51**, 1944, p. 817.
- [13] K. A. BROWNLEE, *Industrial Experimentation*. H. M. S. O., London (1948).

Manuscrit reçu le 29 juillet 1954.

Lettre à l'éditeur

Spherical Aberration of the Eye

GERALD WESTHEIMER

The Ohio State University, Columbus, Ohio, U. S. A.

IVANOFF's data on the spherical aberration of the eye [1, 2] have been criticized by KOOMEN, TOUSEY, and SCOLNIK [3]. The disagreement between IVANOFF's data and other determinations lies largely in what each experimenter considers to be the point conjugate to the fovea with respect to the central zone of the pupil. KOOMEN et al. do not give any value for the central zone while IVANOFF selects the zero point as representing the refractive error of the central axial rays. IVANOFF's apparatus actually does not allow him to measure the position of the point conjugate to the fovea with respect to the narrowest paraxial zone. The particular shapes of his curves have their basis, therefore, in the assumption that the accommodative mechanism of the eye is always so adjusted that, so far as the central zone of the pupil is concerned, perfect conjugacy exists between the object and the fovea under all the conditions of accommodative stimulation used by him.

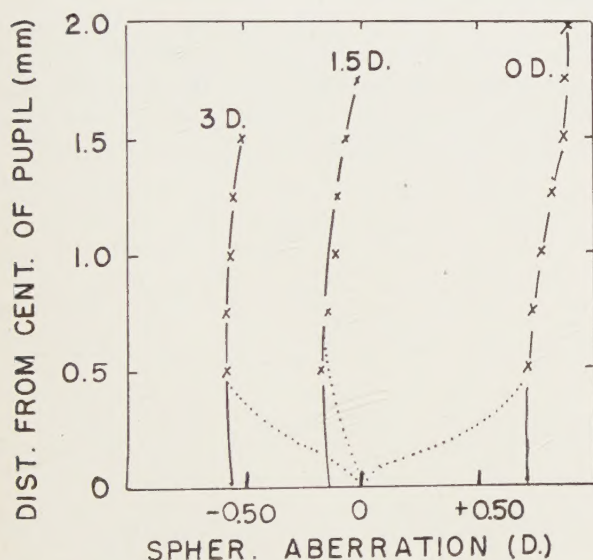


FIG. 1. — The crosses represent IVANOFF's 1953 measurements of the spherical aberration of the eye [2], average of the horizontal meridian of 10 eyes for accommodative stimulation of 0, 1.50 and 3.00 diopters. The dotted lines represent IVANOFF's interpretation of the data and the solid lines the author's interpretation.

It is in fact impossible to determine by ordinary means just how the refractive state of the eye changes in the narrowest paraxial zone. The best estimate that can be made is to find the point of intersection in object space of two rays, one passing through the center of the pupil and the other coming in just a little eccentrically, which the subject reports or which are otherwise determined to be intersecting in the fovea. IVANOFF's data points for 0.5 mm eccentricity actually constitute such measurements and should be regarded as the best approximation to the refractive condition of the central zone of the pupil.

When IVANOFF's 1953 data are redrawn on the basis of this analysis, the following diagram is obtained (fig. 1). This shows that the actual change in spherical aberration during accommodation is small.

It is necessary to say a word about the spacing of the lines on the graph. The line corresponding to zero accommodative stimulation indicates that on the average the eye is nearly 0.75D myopic. For 1.50D stimulus the accommodative response is just about correct while for a 3.00D stimulus the eye remains a little over 0.50D hyperopic, i. e., underaccommodated. This finding is compatible with the observation [4] that most subjects will show a small amount of accommodation when they are presented with a viewing situation at optical but not physical infinity. Similarly, most situations requiring a high accommodative effort are responded to with somewhat less of an accommodative effort than theoretically necessary.

Preliminary experiments by the present writer support the above view. The subjective optometer device designed by FRY [5] was used which measures in effect the intersection in object space of two parallel sheets of rays intersecting in the retina. The separation of the sheets in the plane of the pupil was kept constant at 1.5 mm. Moving the pupil back and forth across the incident beams, no significant change in refractive power of the eye was found until the beams came near the edge of the pupil, and increasing the level of the accommodative response, the necessary adjustment in the setting of the optometer having been made, did not change these findings. The relationship between accommodative stimulation and response, incidentally, was just as expected. There was a small amount of overaccommodation at low

levels of accommodative stimulation and an underaccommodation of up to 1.00D at high levels of accommodative stimulation. With a separation of 1.5 mm between the two beams one would expect some indication of the invagination of the pupil zone *versus* refractive power curves shown by IVANOFF. None, however, was observed.

REFERENCES

- [1] IVANOFF, A. *Rev. Opt.*, **26**, 1947, p. 145.
- [2] IVANOFF, A. *Ann. Opt. oculaire*, **2**, 1953, p. 97.
- [3] KOOMEN, TOUSEY, and SCOLNIK. *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 1949, p. 370.
- [4] MORGAN, M. W. *Am. J. Optom.*, **21**, 1944, p. 183.
- [5] FRY, G. A. *Trans. Am. Acad. Optom.*, **11**, 1937, p. 64.

Manuscrit reçu le 25 août 1955.

Information

Provisional arrangements for 1956 Meeting of International Commission for Optics and accompanying optical symposium on "Frontiers in Physical Optics".

SPONSORS : National Academy of Sciences-National Research Council of the USA, National Science Foundation of the USA, American Academy of Arts and Sciences, Optical Society of America, International Union of Pure and Applied Physics, and International Commission for Optics.

Organizing Committee : The planning and conducting of the scientific meetings is the responsibility of the USA National Committee of the International Commission for Optics.

Further particulars can be obtained from Dr S. S. BALLARD, Visibility Laboratory, Scripps Institution of Oceanography, University of California, San Diego 52, California, U. S. A.

Date : Wednesday, 28th March-Tuesday, 3rd April, 1956.

Place : Cambridge, Massachusetts. Meetings will be held in the Faculty Club and the Kresge Auditorium and Little Theatre of the Massachusetts Institute of Technology.

Programme : One day will be allocated to the meeting of the International Optical Commission, with opportunity for a further meeting if necessary.

Four days will be allocated to a symposium on « Frontiers in Physical Optics », with the following selected topics as the main subjects for discussion :

1. New phase contrast and interference microscopic and measuring devices. — 2. Thin films and filters. — 3. Meteorological optics. — 4. Nuclear optics.

One day will be set aside for organized visits to university and industrial laboratories in the Boston-Cambridge area.

Speakers : Invitations will be issued by the USA National Committee to experts in various countries to present main papers on each of above-noted subjects and perhaps prepared discussion also. It is, however, the intention to leave ample time for free discussion in which anyone can take part.

Language : Invited papers and prepared discussion will be in English.

Note : The regular spring meeting of the Optical Society of America will be held on 5th-7th April in Philadelphia, Pennsylvania, and all interested persons are invited to attend. Information on this meeting can be obtained also from Professor BALLARD.